Adhérence

Définitions	Soit X un ensemble de $\mathbb{R}$ et $x \in \overline{\mathbb{R}}$. <ul style="list-style-type: none"> x est dit intérieur à X lorsque X est un voisinage de x x est dit adhérent à X si tout voisinage de x rencontre X.
Remarque	Une autre manière de caractériser l'adhérence de x dans X lorsque x est réel est : $\forall \varepsilon >]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\cap X \neq \emptyset$
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> 1 est intérieur à l'ensemble $[-2; 3[$; $+\infty$ est intérieur à $[2; +\infty[$ 3 est adhérent à l'ensemble $[-2; 3[$; $+\infty$ est adhérent à $[2; +\infty[$

Densité

Définition	Soit A un ensemble. A est dit dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est adhérent à A . (i)
Propriété	Cette définition est équivalente à : Soient deux réels distincts. Il existe toujours un élément de A entre ces deux réels (ii)

Preuve

(i) $\Rightarrow$ (ii). Soient x et y deux réels distincts. Le réel $z = \frac{x+y}{2}$ est adhérent à A . Soit $\varepsilon = \left| \frac{y-x}{4} \right|$.
 $]z - \varepsilon; z + \varepsilon[$ est un voisinage de z qui rencontre A . $\exists w \in]z - \varepsilon; z + \varepsilon[\cap A$ et w est entre x et y

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit x un réel et V un voisinage de x . $\exists \varepsilon > 0$ tq $]x - \varepsilon; x + \varepsilon[\subset V$
 Entre le réel x et le réel $x + \frac{\varepsilon}{2}$ d'après (ii) il existe un élément y de A . $y \in V$

Propriété $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Preuve

Il s'agit de montrer que entre deux réels distincts a et b il y aura toujours un réel et rationnel et un irrationnel.

1^{ère} étape :

Soient α, β deux réels avec $\alpha < \beta$ tels que $\beta - \alpha > 1$

Soit E la fonction partie entière. Nous noterons $n = E(\alpha) + 1$. Nous avons $\alpha < n < \beta$. Nous avons trouvé un entier entre ces deux réels.

2^{ème} étape :

Prenons $q = E\left(\frac{1}{b-a}\right) + 1$ et intéressons nous à l'intervalle $]qa; qb[$

$qb - qa = q(b - a)$. Or $q > \frac{1}{b-a}$ donc $qb - qa > 1$.

Appliquons la 1^{ère} étape. Il existe un entier p ($p = E(qa) + 1$) tel que $qa < p < qb \Rightarrow a < \frac{p}{q} < b$

Nous avons donc bien trouvé un rationnel entre a et b .

Montrons maintenant qu'il existe toujours un irrationnel.

Soient a et b deux réels quelconques.

Dans l'intervalle $]\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}[$ nous avons vu qu'il existe un rationnel r . Dans l'intervalle $]r; \frac{b}{\sqrt{2}}[$ il existe un deuxième rationnel r' . Un de ces deux rationnels est non nul. Supposons que ce soit r . Nous avons donc :

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < r\sqrt{2} < b$$

Or $r\sqrt{2}$ est irrationnel. En effet si $r\sqrt{2}$ était rationnel alors $\frac{r\sqrt{2}}{r}$ serait rationnel ce qui impliquerait $\sqrt{2}$ rationnel.

Nous avons donc bien trouvé un irrationnel entre a et b .