Trigonométrie. Arccos.

Arccos		
Définition	La restriction de la fonction $\cos$ sur $[0; \pi]$ notée f et à valeurs dans $[-1; 1]$ est bijective. ($\forall x \in [0; \pi], f'(x) = -\sin x$ on a donc $f'(x) \leq 0$, f est donc strictement monotone sur $]0; \pi[$ et continue) Elle admet donc une réciproque f^{-1} que nous appellerons arccos La fonction arccos est donc définie de $[-1; 1]$ dans $[0; \pi]$	
Propriétés	$\forall x \in [-1; 1], \cos(\arccos x) = x$	$\forall x \in [-1; 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$
Preuve	Découle directement de la définition.	$\forall x \in [-1; 1] \cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ $\forall x \in [-1; 1] x^2 + \sin^2(\arccos x) = 1$ $\forall x \in [-1; 1] \sin^2(\arccos x) = 1 - x^2$ $\arccos x \in [0; \pi]$ donc $\sin(\arccos x) \geq 0$ $\forall x \in [-1; 1], \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \square$
Propriétés	$\forall x \in [-1; 1], \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$	
Preuve		
$\forall x \in [-1; 1], \cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos \arccos(x) = -x$ $\forall x \in [-1; 1] \cos(\arccos(-x)) = -x$ $\pi - \arccos(x)$ et $\arccos(-x)$ sont deux réels de l'intervalle $[0; \pi]$ ayant même cosinus. La fonction $\cos$ étant bijective sur cet intervalle nous en déduisant que $\pi - \arccos(x) = \arccos(-x) \quad \square$		
Remarque	Attention $\arccos(\cos x)$ n'est pas toujours égal à x . Exemple $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	
Propriété	La fonction arccos est continue sur $[-1; 1]$ mais dérivable sur $] - 1; 1[$ $\forall x \in] - 1; 1[(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	
Preuve		
La fonction arccos est la réciproque d'une fonction continue et monotone sur $[0; \pi]$ à valeurs dans $[-1; 1]$ On en déduit la continuité de arccos sur $[-1; 1]$ Soit f définie par $\forall x \in [0; \pi], f(x) = \cos x . f'(x) = -\sin x, f'$ ne s'anule pas sur $]0; \pi[$ Donc f étant une bijection de $]0; \pi[$ sur $] - 1; 1[$ dont la dérivée ne s'annule pas, il vient f^{-1} donc arccos dérivable sur $] - 1; 1[$ $\forall x \in] - 1; 1[(\arccos(x))' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin \arccos x} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \square$		
La non dérivabilité en 1 et -1 peut s'établir en calculant $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{\arccos(1+h) - \arccos 1}{h}$ que nous ne ferons pas ici.		
Courbe	— arccos(x) — cos(x) - f(x) = x	