

Coefficients binomiaux

Définition	Soient n et k deux éléments de $\mathbb{N}$. On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.	
Propriété	- Si $n = 0$, $\binom{n}{k} = 1$ pour $k = 0$ et $\binom{n}{k} = 0$ sinon. - Si $n > 0$, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ et sinon $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	
Preuve		
- Si $n = 0$, nous devons compter le nombre de parties à k éléments dans l'ensemble vide. Ce nombre de parties est nul si et seulement si $k > 0$. Il est égal à 1 sinon. ($\emptyset \subset \emptyset$) - Si $n > 0$ et $k > n$ il est impossible de trouver une partie à k éléments dans un ensemble à n éléments. On a donc $\binom{n}{k} = 0$ - Si $n > 0$ et $0 \leq k \leq n$ alors nous allons montrer que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Soit $A = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ un ensemble à n éléments. Combien d'ensembles à k éléments $\{y_1, y_2, \dots y_k\}$ pouvons nous former dans un tel ensemble. Pour y_1 nous pouvons choisir parmi $x_1, x_2 \dots x_n$ soit n possibilités Pour y_2 nous pouvons choisir parmi $n - 1$ possibilités Pour y_3 nous pouvons choisir parmi $n - 2$ possibilités Pour y_k nous pouvons choisir parmi $n - k + 1$ possibilités Pour constituer un ensemble à k éléments nous avons donc $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ possibilités soit $\frac{n!}{(n-k)!}$ (**) Remarquons maintenant que parmi ces $\frac{n!}{(n-k)!}$ beaucoup sont identiques et ne diffèrent que par l'ordre de leurs éléments. De combien de manières peut on ordonner un ensemble de k éléments ? Pour choisir le 1^{er} élément il y a k possibilités. Pour choisir le 2^{eme} élément il y a $k - 1$ possibilités Pour choisir le k^{eme} élément il y a 1 possibilité. Il y a donc $k(k - 1)(k - 2) \dots 1$ possibilités soit $k!$ possibilités pour ordonner un ensemble de k éléments. Revenons à (**). Nous avons trouvé $\frac{n!}{(n-k)!}$ ensembles de k éléments ordonnés dans un ensemble à n éléments. Or chaque ensemble de k éléments figure $k!$ fois (puis qu'il existe $k!$ façons d'ordonner un ensemble à k éléments) Le nombre d'ensembles à k éléments dans un ensemble à n éléments est donc égal à $\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$ soit $\frac{n!}{k!(n-k)!}$		
Propriété	Soient n et k deux entiers naturels avec $0 \leq k \leq n$	
	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
Preuve	$\binom{n}{n-k} = \frac{(n)!}{(n-(n-k))!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$	$\begin{aligned} & \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\ &= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \end{aligned}$
Exemples	$\binom{7}{2} = \binom{7}{5}$	$\binom{7}{5} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4}$

Propriété

La formule d'additivité $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ nous permet de construire le triangle de Pascal ci-contre.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1		$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$			
2	1	2	1			$= \binom{n}{k}$	
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Binôme de Newton	
Propriété	Soient a et b deux complexes et n un entier naturel. $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Preuve	
Par récurrence sur n. Supposons $P(n)$ la propriété $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $(a + b)^0 = 1 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$ donc $P(0)$ est vérifiée. Supposons $P(n)$ vérifiée. $\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-(k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} + \binom{n}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^k b^{n+1-k} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n a^k b^{n+1-k} \left[\binom{n+1}{k} \right] + a^{n+1} + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \text{ donc } \mathbf{P(n + 1) \text{ est vérifiée}} \end{aligned}$	
Exemple	$\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^4 = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{\frac{i\pi k}{4}} e^{\frac{i\pi(n-k)}{3}} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{\frac{3i\pi k}{12} + \frac{4i\pi(n-k)}{12}} = \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} e^{\frac{i\pi n}{3} - \frac{i\pi k}{12}}$
Propriété	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ (Il suffit d'appliquer la formule du binôme à $a = b = 1$)
Remarque	Remarquons que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ désigne aussi le nombre de sous ensembles à 0 éléments + le nombre de sous ensembles à 1 éléments + ... le nombre de sous ensembles à n éléments d'un ensemble à n éléments. Nous avons donc démontré la formule suivante
Propriété	Soit E un ensemble à n éléments. $\text{Card}(P(E)) = 2^n$
Remarque	L'application du Binôme de Newton pour $n = 2$ nous redonne une formule célèbre : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ Pour $n = 3$ il nous faudra désormais mémoriser que : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$