Nombres complexes. Cours.

Présentation d'un nombre complexe		
Définitions (Rappel)	Soit i un nombre tel que $i^2 = -1$. L'ensemble noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres dits complexes de la forme $z = a + ib$ avec a et b réels quelconques. a est appelée la partie **réelle** de z (On note $a = \Re(z)$) et b est appelée la partie **imaginaire** ($b = \mathcal{I}(z)$). Le plan étant rapporté à un repère orthonormé on identifie chaque nombre complexe à un point du plan, a étant son abscisse et b son ordonnée. Dans l'expression $z = a + ib$, $a + ib$ est appelé **l'affixe** de z Soit $z = a + ib$. On appelle nombre **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre $a - ib$	
Propriété	$\Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$	$\mathcal{I}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
Preuve	$\dfrac{z + \bar{z}}{2} = \dfrac{a + ib + a - ib}{2} = a = \Re(z)$	$\dfrac{z - \bar{z}}{2i} = \dfrac{a + ib - (a - ib)}{2i} = \dfrac{2ib}{2i} = b = \mathcal{I}(z)$
Définition	On appelle l'ensemble des imaginaires purs et on note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $z = ib$ avec b réel quelconque.	
Propriété	$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$	$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$
Preuve	$z = \bar{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow ib = -ib \Leftrightarrow b = 0$	$z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + ib = -(a - ib) \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0$

Propriétés algébriques.		
Définitions	Soient z et z' deux nombres complexes quelconques avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On définit l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ de la manière suivante :	
	$z + z' = (a + a') + i(b + b')$	$z * z' = (a + ib)(a' + ib')$ $= (aa' - bb') + i(ba' + ab')$
Propriétés	Ces opérations possédent des propriétés analogues à celles de $\mathbb{R}$. (commutativité et associativité). En particulier $\forall z \in \mathbb{C}, z + (-z) = 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}^*, z * \frac{1}{z} = 1$ En posant $z = a + ib$ il vient $-z = -a - ib$ et $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$	
Propriétés	Soient z et z' deux nombres complexes quelconques avec $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$	
	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$	$\overline{-z} = -\bar{z}$
	$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$	$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
	$\overline{(\bar{z})} = z$	
Preuve	Il sufiit d'écrire $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ le reste vient tout seul ….	

Module						
Définition	Soit $z = a + ib$ un nombre complexe quelconque. On appelle module de z et on note $\lvert z \rvert$ le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$					
Propriété	$\lvert z \rvert = \sqrt{z\bar{z}}$	$\lvert z \rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$	$\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert zz' \rvert = \lvert z \rvert \lvert z' \rvert$	$\left\lvert \frac{1}{z} \right\rvert = \frac{1}{\lvert z \rvert}$	$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$
Preuve	Là encore il sufiit d'écrire $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. Le reste est immédiat.					
Propriété	Soient A et B deux points du plan d'affixe, z et z'. Alors $AB = \lvert z' - z \rvert$					
Preuve	Soient A d'affixe $z = a + ib$ et B d'affixe $z' = c + id$ deux points du plan. $\lvert z' - z \rvert = \lvert c + id - (a + ib) \rvert = \lvert c - a + i(d - b) \rvert = \sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = AB$					
Propriété	$\big\lvert \lvert z \rvert - \lvert z' \rvert \big\rvert \leq \lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$					

Preuve

Lemme : $\forall z \in \mathbb{C}, \Re(z) \leq \lvert \Re(z) \rvert \leq \lvert z \rvert$.
Pour le démontrer, il suffit d'élever cette expression au carré : $\lvert z \rvert^2 = \Re^2(z) + \mathcal{I}^2(z) \geq \Re^2(z)$
$\lvert z \rvert$ et $\lvert \Re(z) \rvert$ étant des réels positifs quelconques, il vient $\lvert \Re(z) \rvert \leq \lvert z \rvert$ (La fonction racine carré étant croissante sur $\mathbb{R}^+$). Il vient $\Re(z) \leq \lvert \Re(z) \rvert \leq \lvert z \rvert$.

$(\lvert z \rvert + \lvert z' \rvert)^2 - \lvert z + z' \rvert^2 = \lvert z \rvert^2 + \lvert z' \rvert^2 + 2\lvert z \rvert \lvert z' \rvert - (z + z')\overline{(z + z')} = 2\lvert z \rvert \lvert z' \rvert - z\bar{z'} - \bar{z}z' = 2[\lvert zz' \rvert - \Re(z\bar{z'})] = 2[\lvert z\bar{z'} \rvert - \Re(z\bar{z'})]$. D'après le lemme nous avons $\Re(z\bar{z'}) \leq \lvert z\bar{z'} \rvert$ soit : $(\lvert z \rvert + \lvert z' \rvert)^2 - \lvert z + z' \rvert^2 \geq 0$ et donc

$$(\lvert z \rvert + \lvert z' \rvert)^2 \geq \lvert z + z' \rvert^2$$
$$\Rightarrow \lvert z + z' \rvert \leq \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$$

En prenant la racine carré de ces deux termes. Nous avons donc démontré la deuxième partie de l'inégalité.

$$\lvert z \rvert \leq \lvert z - z'' + z'' \rvert \leq \lvert z - z'' \rvert + \lvert z'' \rvert \Rightarrow \lvert z \rvert - \lvert z'' \rvert \leq \lvert z - z'' \rvert$$
$$\lvert z'' \rvert \leq \lvert z'' - z + z \rvert \leq \lvert z'' - z \rvert + \lvert z \rvert \Rightarrow \lvert z'' \rvert - \lvert z \rvert \leq \lvert z'' - z \rvert$$

De ces deux inégalités il vient $\big\lvert \lvert z \rvert - \lvert z'' \rvert \big\rvert \leq \lvert z - z'' \rvert$
Posons maintenant $z'' = -z'$ il vient $\big\lvert \lvert z \rvert - \lvert z' \rvert \big\rvert \leq \lvert z + z' \rvert$ ce qui nous donne la première partie de l'inégalité.