Nombres complexes. Cours.

Forme trigonométrique d'un complexe

Définitions

Soit z un complexe quelconque non nul. $\frac{z}{|s|}$ est un nombre complexe de module 1. Il existe donc θ réel tel que $\frac{z}{|z|} = \cos\theta + isin\theta = e^{i\theta} \Rightarrow \boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}}$

Cette dernière expression est la forme trigonométrique de z.

On appelle argument de z tout réel $\boldsymbol{\theta}$ vérifiant $\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta}}$**.**

Deux nombres θ et θ' sont deux arguments d'un même nombre complexe z si et seulement si ils sont congrus modulo 2π. z ne possède donc qu'un argument dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

Cet argument est appelé l'argument **principal** de z et est noté $\arg(z)$

Exemples

- $z = 1 + i\sqrt{3}$; $|z| = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$; $\frac{z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$
  z est donc le nombre complexe de module 2 et d'argument principal $\frac{\pi}{3}$
- $z = 2 - i$; $|z| = \sqrt{2^2+1} = \sqrt{5}$. Soit θ l'argument principal de z. θ vérifie $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
  $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ et donc $\theta = \arctan -\frac{1}{2}$. Il vient $z = \sqrt{5}e^{iArctan(-\frac{1}{2})}$

Propriétés algébriques

Pour tous z, z' de $\mathbb{C}^*$

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
Preuve		
$z = \|z\|e^{iarg(z)}$; $z' = \|z'\|e^{iarg(z')}$; $zz' = \|zz'\|e^{i(\arg(z)+\arg(z'))}$	$z = \|z\|e^{iarg(z)}$ $\bar{z} = \overline{\|z\|e^{iarg(z)}} = \|z\|e^{-iarg(z)}$	$z = \|z\|e^{iarg(z)}$ $\frac{1}{z} = \frac{1}{\|z\|e^{iarg(z)}} = \frac{1}{\|z\|}e^{-iarg(z)}$

Propriété

Tout somme de la forme $a\cos t + b\sin t$ avec a et b réels peut se mettre sous la forme $A\cos(t - \theta)$ avec A et θ réels.

Preuve

- 1ère méthode :
  Si $a = b = 0$ alors $A = 0$ et c'est évident.
  Sinon $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t)$
  Nous pouvons remarquer que $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$
  donc il existe θ réel tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\theta$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\theta$
  Il vient $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos t + \sin\theta\sin t) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t - \theta)$
- 2ème méthode :
  $$a\cos t + b\sin t = \Re((a - ib)(\cos t + i\sin t)) = \Re((a - ib)e^{it})$$
  Posons $a + ib = \rho e^{i\theta}$. (forme trigonométrique de $a + ib$).
  $$a\cos t + b\sin t = \Re\left(\rho e^{-i\theta}e^{it}\right) = \Re\left(\rho e^{i(t-\theta)}\right) = \rho\cos(t - \theta)$$

Exemples

Résolvons $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\frac{2\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi[2\pi] \\ x = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$