Congruence	
Définition	Soient a, b et n trois élements de $\mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n et on note $a \equiv b[n]$ dans le cas où $n \mid b-a$. On a alors : $\exists k \in \mathbb{Z}\ tq\ a = b + kn$
Exemple	$17 \equiv 2[3]$ car $17 = 2 + 5 * 3$; $-21 \equiv 0[7]$ car $-21 = 0 - 7 * 3$
Théorème	La relation être congru à modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$
Preuve	
• Reflexivité : $\forall a \in \mathbb{Z}\ \ a \equiv a[n]$ car $n \mid a-a$ • Symétrie : si $a \equiv b[n]$ alors $n \mid b-a$ mais n divise aussi $a-b$ ce qui implique $b \equiv a[n]$ • Transitivité : si $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$ alors $n \mid b-a$ et $n \mid c-b$. Donc $n \mid b-a+c-b$ soit $n \mid c-a$ ce qui implique $a \equiv c[n]$	
Propriété	Compatibilité de la relation de congruence avec la somme : $si\ a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $a + c \equiv b + d[n]$
Preuve	
Si $a \equiv b[n]$ alors $a = b + kn$ Si $c \equiv d[n]$ alors $c = d + k'n$ Il vient $a + c = b + d + n(k + k')$ donc $a + c \equiv b + d[n]$	
Propriété	Compatibilité de la relation de congruence avec le produit: $si\ a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ alors $ac \equiv bd[n]$
Preuve	
Si $a \equiv b[n]$ alors $a = b + kn$ Si $c \equiv d[n]$ alors $c = d + k'n$ Il vient $ac = (b + kn)(d + k'n) = bd + n(bk' + kd + kk'n)$ donc $ac \equiv bd[n]$	
Cas particulier	$si\ a \equiv b[n]$ alors $a^k = b^k[n]$
Propriété	Multiplication par un entier relatif : $si\ a \equiv b[n]$ et $m \in \mathbb{Z}$ alors $ma \equiv mb[mn]$
Preuve	
$si\ a \equiv b[n]$ alors $a = b + kn$. Il vient $ma = m(b + kn) = mb + nmk$ donc $ma \equiv mb[mn]$	
Exemple	Montrons que $3^{126} + 5^{126}$ est divisible par 13 Cela revient à montrer que $3^{126} + 5^{126} = 0[13]$ $3^3 = 27 = 1 + 2 * 13 = 1[13]$ $5^2 = 25 = 2 * 13 - 1 = -1[13]$ donc $5^4 = (-1)^2 = 1[13]$ $126 = 3 * 42$ donc $3^{126} = 3^{3*42} = (3^3)^{42} = 1[13]$ $126 = 4 * 31 + 2$ donc $5^{126} = 5^{4*31+2} = (5^4)^{31} * 5^2 = 25[13] = 12[13]$ Donc $3^{126} + 5^{126} = 1 + 12[13] = 0[13]$