Continuité. Approche séquentielle

Théorème	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ une fonction et $a \in D_f$. f est continue en a ssi Pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ Cela peut se traduire par $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n)$

Preuve

Nous savons que f est continue en a ssi $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Or nous savons aussi que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ssi pour toute suite de points $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D_f convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$. Nous avons donc l'équivalence voulue.

Remarque	Grâce à ce théorème il est possible de résoudre de nombreuses équations fonctionnelles, dont nous allons voire ci-bas un exemple.
Exemple	Caractériser les fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{Bmatrix} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{Bmatrix}$

Solution

$$f(0) = 2f(0) \Longrightarrow f(0) = 0.$$
$$f(1) = f(1)^2 \Longrightarrow f(1) \in \{0;1\}$$

Si $f(1) = 0$

Nous pouvons démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = 0$$

En effet l'initialisation est déjà vérifiée.
Quand à l'hérédité : si $f(n-1) = 0$ alors

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = 0$$

De plus l'égalité $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$ nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ f(n) = 0$$

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. $f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$
Donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) * f\left(\frac{1}{q}\right) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous savons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to+\propto} r_n = x$

f est continue donc

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\propto} r_n\right) = \lim_{n\to+\propto} f(r_n) = 0$$

Car $f(r_n) = 0$
Nous avons donc montré que f est la fonction nulle

Si $f(1) = 1$

Nous pouvons démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ f(n) = n$$

En effet l'initialisation est déjà vérifiée.
Quand à l'hérédité : si $f(n-1) = n-1$ alors

$$f(n) = f(n-1) + f(1) = n$$

De plus l'égalité $f(n) + f(-n) = f(0) = 0$ nous donne :

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ f(-n) = -n \text{ et donc } \forall n \in \mathbb{Z}\ f(n) = n$$

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. $f(1) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$
Donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$

Soit $x \in \mathbb{Q}$, $\exists (p,q) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}^*$ tel que $x = \frac{p}{q}$

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p)f(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous savons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{n\to+\propto} r_n = x$

f est continue donc

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to+\propto} r_n\right) = \lim_{n\to+\propto} f(r_n) = \lim_{n\to+\propto} r_n = x$$

Car $f(r_n) = x$
Nous avons donc montré que f est la fonction identité

Réciproquement les fonctions nulles et identité vérifient les conditions de l'équation fonctionnelles. Nous pouvons donc en déduire que :

f est continue et définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{Bmatrix} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ f(xy) = f(x)f(y) \end{Bmatrix}$ ssi $\begin{pmatrix} f = \tilde{0} \\ ou \\ f = Id \end{pmatrix}$