

**Norme infinie**

Nous faisons ici un petit aparté pour introduire une norme de fonctions qui nous sera bien utile pour plus tard.

<b>Définition</b>	Soit $f$ une fonction bornée définie sur un ensemble de définition $D_f$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ . Nous appellerons norme infinie de $f$ et nous noterons $\ f\ _\infty$ le réel $\sup_{x \in D_f}  f(x) $		
<b>Exemple</b>	$\ \sin\ _\infty = 1, \ \cos\ _\infty = 1.$	Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \rightarrow e^{it} \end{cases}$ $\ f\ _\infty = 1$	Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \frac{1}{1+e^t} \end{cases}$ $\ g\ _\infty = 1$
<b>Propriété</b>	Soit $f$ une fonction bornée définie sur un ensemble de définition $D_f$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ . La caractérisation d'une norme se fait en trois temps : <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\ f\ _\infty = 0 \Rightarrow \forall x \in D_f, f(x) = 0</math></li> <li>• Soit <math>\lambda \in \mathbb{C}</math>. <math>\ \lambda f\ _\infty =  \lambda  \ f\ _\infty</math></li> <li>• Soit <math>g</math> une autre fonction bornée définie sur un ensemble de définition <math>D_g = D_f</math> et à valeurs dans <math>\mathbb{C}</math>. Alors <math>f + g</math> est aussi bornée et <math>\ f + g\ _\infty \leq \ f\ _\infty + \ g\ _\infty</math></li> </ul>		
<b>Preuve</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\ f\ _\infty = 0 \Rightarrow \sup_{x \in D_f}  f(x)  = 0 \Rightarrow \forall x \in D_f, f(x) = 0</math></li> <li>• Soit <math>\lambda \in \mathbb{C}</math>. <math>\ \lambda f\ _\infty = \sup_{x \in D_f}  \lambda f(x)  = \sup_{x \in D_f}  \lambda   f(x)  =  \lambda  \sup_{x \in D_f}  f(x)  =  \lambda  \ f\ _\infty</math></li> <li>• Soit <math>g</math> une autre fonction bornée définie sur un ensemble de définition <math>D_g = D_f</math> et à valeurs dans <math>\mathbb{C}</math>.  <math>\forall x \in D_f \quad  f(x) + g(x)  \leq  f(x)  +  g(x) </math> (Inégalité triangulaire)  <math>\Rightarrow \forall x \in D_f \quad  f(x) + g(x)  \leq \ f\ _\infty + \ g\ _\infty</math>  Donc <math>f + g</math> est bornée et <math>\ f + g\ _\infty \leq \ f\ _\infty + \ g\ _\infty</math></li> </ul>		