Image d'un segment par une fonction continue

Nous ne considérerons ici que les fonctions réelles.

Théorème	Toute fonction continue sur un segment atteint ses bornes.
Remarque	Attention l'hypothèse segment est primordiale. En effet la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;1]$ mais n'est pas bornée. L'image de $]0;1]$ est $[1;+\infty[$

Preuve

Soit $[a;b]$ un segment quelconque de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction continue sur $[a;b]$.
Nous savons que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Donc $f([a;b])$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
$f([a;b])$ est non vide donc $sup\, f([a;b]) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
En d'autres termes la borne sup de $f([a;b])$ est soit un réel soit $+\infty$
Appelons $M = \sup f\big([a\,;b]\big)$

D''après la définition séquentielle de la borne sup il existe une suite (y_n) d'éléments de $f([a;b])$ convergeant vers M.
$\forall n, y_n \in\ f([a;b])$ donc $\exists (x_n)$ suite de $[a;b]$ telle que $\forall n, y_n = f(x_n)$.

(x_n) est une suite à valeurs dans $[a;b]$ donc d'après Bolzano Weierstrass il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ qui converge dans $[a;b]$ vers un réel l.

Nous avons donc $M = \lim_{n\to+\infty} y_n = \lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)}$ En effet quand une suite converge vers une limite toute suite extraite converge vers la même limite

Or $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ Donc $M = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})$
f est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}\right) = f(l)$

Nous sommes donc arrivés à la conclusion $\sup f\big([a\,;b]\big) = f(l)$ avec $l \in [a;b]$.
Nous en déduisons que $\sup f\big([a\,;b]\big)$ est finie et atteinte sur $[a;b]$ en $x = l$

Le même raisonnement appliqué à $\inf\, f\big([a\,;b]\big)$ nous amène à $\inf\, f\big([a\,;b]\big)$ qui est finie et atteinte en un autre réel de $[a;b]$.

Nous avons donc montré que f était bornée sur $[a;b]$ (puisque $\sup f\big([a\,;b]\big)$ et $\inf\, f\big([a\,;b]\big)$ sont finis

Remarque	Ce théorème se lit aussi sous la forme suivante : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment