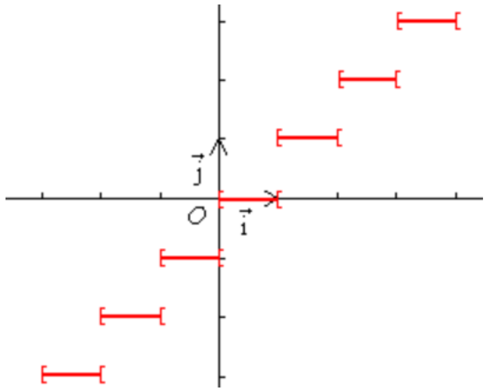
Continuité en un point

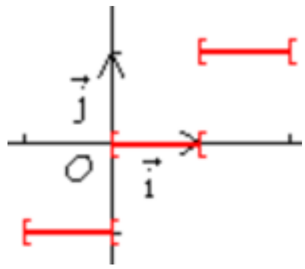
L'ensemble de définition des fonctions que nous étudierons dans ce chapitre sera toujours une sous-partie de $\mathbb{R}$

Définition	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et $a \in D_f$. f est dite continue en a *ssi* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ Cela peut se traduire par $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_a\ (voisinage\ de\ a)$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_f\ \ |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ Ou encore : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
Remarque	Dans le cas d'une fonction à valeurs réelles cette définition peut se traduire prosaïquement ainsi : f est continue en a si le tracé de la courbe de la fonction f autour de $x = a$ peut se faire « sans lever le stylo »
Définition	Une fonction est dite continue sur une sous-partie I de $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en tout point de I
Exemples	La plupart des fonctions manipulées jusqu'à la terminale sont continues sur leur ensemble de définition : cosinus, sinus, exponentielle, logarithme …. … Cependant certaines fonctions ne sont pas continues. Voici ci-contre le graphe de la fonction partie entière. Nous constatons que le tracé de cette courbe ne peut se faire sans lever le stylo. En effet la fonction n'est pas continue en $-2, -1, 0, 1, 2$ …. 
Théorème	Dans le cas d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, f est dite continue en un point a *ssi* $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en ce point

Preuve

$$|f(x) - f(a)| = \sqrt{\left(Re\big(f(x)\big) - Re\big(f(a)\big)\right)^2 + \left(Im\big(f(x)\big) - Im\big(f(a)\big)\right)^2}$$

- Si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en a alors $\lim_{x\to a} Re(f(x)) = Re\big(f(a)\big)$ et $\lim_{x\to a} Im(f(x)) = Im\big(f(a)\big)$
  Donc $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$ ce qui implique la continuité de f en a
- Si f est continue en a alors $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$ Or $|f(x) - f(a)| \geq \left|Re\big(f(x)\big) - Re\big(f(a)\big)\right|$
  Donc $\lim_{x\to a} |Re(f(x)) - Re(f(a))| = 0$ ce qui implique la continuité de $Re(f)$ en a. Même raisonnement pour $Im(f)$

Exemple	La fonction $\begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \to e^{ix} \end{Bmatrix}$ est continue en tout point x réelle car les fonctions cos et sin le sont aussi.
Définitions	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et $a \in D_f$ • f est dite continue à droite en a *ssi* $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ Ou encore *ssi* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a; a+\eta] \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ • f est dite continue à gauche en a *ssi* $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$ Ou encore *ssi* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in [a-\eta; a] \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
Exemple	Reprenons le graphe de la fonction partie entière ci-contre. Cette fonction est continue à droite en $x = 1$ mais n'est pas continue à gauche en ce même point. Il en est de même en $x = 2, x = 3$ …. 

Théorème

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et $a \in D_f$ tel qu'il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta; a+\eta[\subset D_f$ (Ainsi f est définie à droite et à gauche de a). Dans ces conditions :

f est continue en a ssi f est continue à droite et à gauche de a

Preuve

- f est continue en $a \Longrightarrow$ f est continue à droite et à gauche de a
- Si f est continue à droite et à gauche de a, alors $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \Longrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Longrightarrow f$ est continue en a

Définition

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ avec $a \notin D_f$ et a adhérent à D_f

On dit que f est prolongeable par continuité ssi $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et est finie.

On appelle alors prolongement par continuité de la fonction f, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $D_f \cup \{a\}$ par

$$\begin{Bmatrix} \forall x \in D_f\ \tilde{f}(x) = f(x) \\ \tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \end{Bmatrix}$$

Exemple

La fonction $\varphi: \begin{Bmatrix} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{sinx}{x} \end{Bmatrix}$ n'est pas définie en 0. Néanmoins nous pouvons remarquer que $\frac{sinx}{x} = \frac{sinx - \sin 0}{x-0}$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x}$ est le nombre dérivé en 0 de la fonction sin. Ce nombre vaut $\cos 0$, c'est-à-dire 1.

Nous avons donc $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ et il est donc possible de construire $\tilde{\varphi}: \begin{Bmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{sinx}{x}\ si\ x \neq 0 \\ 0 \to 1 \end{Bmatrix}$ prolongement par continuité de φ.

Remarque

Bien que nous ne devrions pas car les fonctions f et $\tilde{f}$ n'ont pas le même ensemble de définition, l'usage veut que la fonction $\tilde{f}$ soit souvent notée f

Propriété

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}$ avec $a \notin D_f$ et a adhérent à D_f. On suppose f prolongeable par continuité sur $D_f \cup \{a\}$ et on note $\tilde{f}$ son prolongement par continuité.

Alors $\tilde{f}$ est continue en a

Preuve

Nous avons $\lim_{x\to a} f(x) = \tilde{f}(a)$. Cela peut se traduire ainsi $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_f\ |f(x) - \tilde{f}(a).| < \varepsilon\ (i)$

$\forall x \in V_a \cap D_f\ f(x) = \tilde{f}(x)$ donc (i) peut s'écrire : $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_f\ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a).| < \varepsilon$

Mais pour $x = a$ on a bien sur $\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a) = 0$ donc on peut remplacer dans l'expression au-dessus D_f par $D_{\tilde{f}}$ qui vaut $D_f \cup \{a\}$. Cela nous donne : $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_{\tilde{f}}\ |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a).| < \varepsilon$. Cela traduit la continuité de $\tilde{f}$ en a.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions définies sur deux ensembles de définition D_f et D_g avec $a \in D_f \cap D_g$

On suppose f et g continues en a

- Les fonction somme $f+g$ et produit fg sont continues en a
- Si f ne s'annule pas dans un voisinage de a alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue en a

Preuve

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\, g(x) = f(a)g(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = f(a) + g(a)$
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ avec $\forall x \in V_a\ f(x) \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(a)}$

Exemple

- Les fonctions $x \to x^3$ et $x \to \frac{1}{1+x^2}$ sont continues en 0 donc les fonctions $x \to x^3 + \frac{1}{1+x^2}$ et $x \to \frac{x^3}{1+x^2}$ le sont aussi
- La fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$ ne s'annule jamais et est continue en 0 donc la fonction inverse $x \to 1+x^2$ est aussi continue en 0

Propriété

Soit f définie sur un ensemble de définition D_f et continue en $a \in D_f$

Soit g définie sur un ensemble de définition D_g

Soit V_a un voisinage de a tel que $f(V_a) \subset D_g$

Si g est continue en $f(a)$

Alors la fonction composée gof est continue en a

Preuve

Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ et $\lim_{y\to f(a)} g(y) = g(f(a))$ alors $\lim_{x\to a} fog(x) = fog(a)$

Exemple	La fonction $x \to \frac{1}{1+x^2}$ est continue en 0 et envoie $\mathbb{R}$ sur $[0;1]$ $(f(0)=1)$ La fonction $x \to e^x$ est continue en 1 et est définie sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $x \to e^{\frac{1}{1+x^2}}$ est continue en 0