Continuité sur un intervalle

Nous ne considérerons ici que les fonctions réelles.

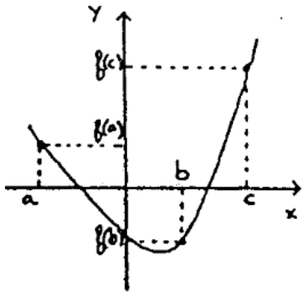
Théorème1	Une fonction f injective sur un intervalle I et continue est strictement monotone

Preuve (Pas exigible)

Supposons f non strictement monotone. Alors cela signifie qu'il existe a, b, c avec $a < b < c$ tel que $f(b)$ est en dehors de l'intervalle délimité par $f(a)$ et $f(c)$.

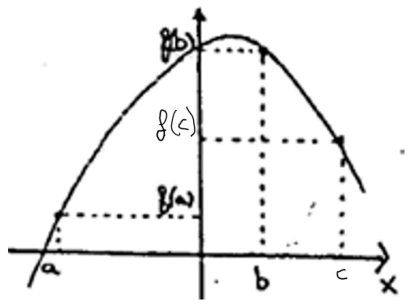
- Supposons $f(c) > f(a)$.
  Nous avons deux cas de figure :

soit $f(b) < f(a) < f(c)$



Soit k tel que $k \in]f(b); f(a)[$. k appartient aussi à $]f(b); f(c)[$
f étant continue, le TVI nous donne l'existence de deux réels α_1 et α_2 avec $\alpha_1 \in]a; b[$ et $\alpha_2 \in]b; c[$ tels que :
$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = k$
L'injectivité de f sur I est donc impossible.

soit $f(b) > f(c) > f(a)$



Soit k tel que $k \in]f(c); f(b)[$. k appartient aussi à $]f(a); f(b)[$
f étant continue, le TVI nous donne l'existence de deux réels α_1 et α_2 avec $\alpha_1 \in]b; c[$ et $\alpha_2 \in]a; b[$ tels que :
$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = k$
L'injectivité de f sur I est donc impossible.

- Supposons $f(c) < f(a)$.

Nous avons soit $f(b) < f(c) < f(a)$, soit $f(b) > f(a) > f(c)$. Prenons la fonction $\varphi = -f$
Cela nous donne $\varphi(b) > \varphi(c) > \varphi(a)$ ou $\varphi(b) < \varphi(a) < \varphi(c)$. Nous sommes donc ramenés au premier cas avec
$\varphi(c) > \varphi(a)$
Cela prouve la non injectivité de φ et donc de f

Dans tous les cas f ne peut être injective ce qui implique que f doit être strictement monotone

Théorème2	Soit f une fonction strictement monotone sur un intervalle I. Alors si $f(I)$ est un intervalle, la fonction f est continue.

Preuve (Pas exigible)

Soit $x \in I$. $f(x) \in f(I)$ et $f(I)$ est un intervalle donc en choisissant $\varepsilon > 0$ il existe dans l'ensemble :
$f(I) \cap]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[$ un intervalle fermé.
Posons $f(a)$ et $f(b)$ ses bornes.
Nous avons $f(x) - \varepsilon \leq f(a) \leq f(x) \leq f(b) \leq f(x) + \varepsilon$

Supposons f strictement croissante. Nous avons $\forall y \in]a; b[\ f(y) \in [f(a); f(b)]$ et donc $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$
Nous avons donc trouvé un voisinage de x, V tel que $\forall y \in V, f(y) \in \left]f(x) - \varepsilon\,; f(x) + \varepsilon\right[$
La continuité est démontrée.
Si f est strictement décroissante. Nous avons $\forall y \in]b; a[\ f(y) \in [f(a); f(b)]$ et donc $f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$
Nous avons donc là encore trouvé un voisinage de x, V tel que $\forall y \in V, f(y) \in \left]f(x) - \varepsilon\,; f(x) + \varepsilon\right[$
Là encore la continuité est démontrée.

Exemple	Considérons la fonction sin. Cette fonction envoie l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. La fonction sin est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. (En effet sa fonction dérivé cos est strictement positive sauf en deux points). $[-1; 1]$ est un intervalle donc la fonction sin est continue sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (mais nous le savions déjà …)

Théorème3	Toute fonction continue sur un intervalle I et strictement monotone admet une fonction réciproque de même monotonie et continue

Preuve (Pas exigible)

Soit $f: I \to f(I)$. f est strictement monotone donc injective. Elle est de plus par construction surjective. Nous en déduisons qu'elle est bijective. Sa réciproque f^{-1} envoie $f(I)$ sur I.
Remarquons que si f strictement croissante alors $f(a) < f(b) \Longrightarrow a < b$ Donc f^{-1} est strictement croissante aussi.
De même si f est strictement décroissante. Donc f^{-1} est de même stricte monotonie que f. f^{-1} envoie $f(I)$ sur I. I est un intervalle donc d'après le thèorème2 f^{-1} est continue.

Exemple	Considérons la fonction sin sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Cette fonction est strictement monotone (croissante). Elle admet donc une fonction réciproque que nous nommerons $Arcsin$: $[-1; 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ Cette fonction sera aussi strictement strictement monotone (croissante) et continue sur $[-1; 1]$