

Continuité sur un intervalle

Nous ne considérerons ici que les fonctions réelles.

Définitions	• Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ f est dite continue sur un intervalle I si et seulement si elle est continue en tout point de I. • L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I se note $\mathcal{C}(I)$
Théorème	Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f continue sur $[a; b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$ alors $\exists c \in [a; b]$ tel que : $f(c) = 0$
Remarque	La relation $f(a)f(b) \leq 0$ indique que f change de signe sur $[a; b]$. Ce théorème nous affirme que si f est continue, ce changement de signe implique qu'il existe un c tel que $f(c) = 0$

Preuve 1

f changeant de signe sur $[a; b]$ nous pouvons supposer que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$

Nous allons construire deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ces suites se caractérisent par leur relation d'initialisation $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et par leur relation d'hérédité :

$$\text{Si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0 \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases} \quad (2)$$

Ainsi nous garantissons le fait que si $f(a_n) \geq 0$ et $f(b_n) \leq 0$ alors $f(a_{n+1}) \geq 0$ et $f(b_{n+1}) \leq 0$

Nous allons montrer par récurrence que $\forall n, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

Initialisation :

Dans le cas 1 : $\begin{cases} a_1 = a_0 \\ b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \end{cases}$ donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$

Dans le cas 2 : $\begin{cases} a_1 = \frac{a_0+b_0}{2} \\ b_1 = b_0 \end{cases}$ donc $a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0$

Hérédité :

Supposons $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

$$\text{Dans le cas 1 : } \begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} \\ b_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$$

$$\text{Dans le cas 2 : } \begin{cases} a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \\ b_{n+2} = b_{n+1} \end{cases}$$

$$\text{donc } a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq b_{n+2} \leq b_{n+1}$$

Nous avons donc bien montré que $\forall n, a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$

Dans le cas 1 et le cas 2 nous avons : $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$. La suite $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $b_0 - a_0 > 0$. Nous en déduisons donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$

Toutes les conditions sont donc réunies pour dire que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes. Elles admettent donc une limite commune l . Que vérifie cette limite ?

Nous savons que $f(a_0) \geq 0$ et $f(b_0) \leq 0$. De plus si $f(a_n) \geq 0$ et $f(b_n) \leq 0$ alors $f(a_{n+1}) \geq 0$ et $f(b_{n+1}) \leq 0$. Cela est garanti par les relations (1) et (2). Nous pouvons en déduire par récurrence que $\forall n, f(a_n) \geq 0$ et $f(b_n) \leq 0$

f est continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n\right) = f(l)$.

Or $\forall n, f(a_n) \geq 0$ donc $f(l) \geq 0$.

f est continue donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n\right) = f(l)$.

Or $\forall n, f(b_n) \leq 0$ donc $f(l) \leq 0$.

Si $f(l)$ est positif et négatif à la fois cela signifie que $f(l) = 0$

Nous avons donc montré l'existence d'un l dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $f(l) = 0$

Nous avons supposé au début de cette preuve que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. Dans le cas contraire : $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ posons $\varphi = -f$. Il vient $\varphi(a) \geq 0$ et $\varphi(b) \leq 0$. Reprenons toute la démonstration précédente avec φ . Cela nous amène à prouver l'existence d'un l dans l'intervalle $[a; b]$ tel que $\varphi(l) = 0$. Mais $\varphi(l) = 0 \Leftrightarrow f(l) = 0$

Illustration	
Dans le cas où $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$	Dans le cas où $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$
Preuve 2	
Il existe une deuxième preuve qui repose sur la propriété de la borne sup. f changeant de signe sur $[a; b]$ nous pouvons supposer que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$. Si $f(a) = 0$ ou $f(b) = 0$ alors c'est fini nous avons bien trouvé c dans $[a; b]$ tel que $f(c) = 0$ Nous pouvons donc supposer que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ Soit $A = \{x \in [a; b], f(x) \geq 0\}$. A est non vide puisque $a \in A$. De plus A est majoré par b. A admet donc une borne sup que nous nommerons m avec $a < m < b$ m est la borne sup de A donc $\exists (x_n)$ suite de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = m$ $f(m) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ (car f est continue). Or $\forall n, f(x_n) \geq 0$ donc $f(m) \geq 0$ Construisons la suite $y_n = m + \frac{1}{n}$. Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = m$ $\forall n, f(y_n) < 0$ (En effet y_n est supérieur à $\sup(A)$ et pour n assez grand $y_n \in [a; b]$) f est continue donc $f(m) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n)$. $\forall n, f(y_n) < 0$ donc $f(m) \leq 0$ Nous avons donc $f(m) \leq 0$ et $f(m) \geq 0$ ce qui implique $f(m) = 0$ Là encore si nous avons supposé $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$ dès le départ il aurait suffi de travailler avec la fonction $\varphi = -f$ et nous aurions prouvé l'existence d'un m dans $[a; b]$ tel que $\varphi(m) = f(m) = 0$	
Théorème	C'est la version la plus générale du TVI Soit f continue sur un intervalle $[a; b]$ ($b \geq a$) Soit m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists x \in [a; b]$ tel que $f(x) = m$
Preuve	
Supposons que $f(a) \leq f(b)$ et nous avons donc $f(a) \leq m \leq f(b)$ Construisons la fonction $\varphi = f - m$. $\varphi(a) \leq 0$ et $\varphi(b) \geq 0$. De plus φ est continue donc d'après le théorème précédent $\exists x \in [a; b]$ tel que $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$	
Exemple	Soit f une fonction définie sur $[-4; 3]$ par $f(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$ $f(-4) = -3$; $f(3) = 67$ donc d'après le théorème précédent l'équation $f(x) = 3$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-4; 3]$
Remarque	Ce théorème est rarement utilisé sous cette forme car il ne donne que l'existence d'une solution à une équation. Son corollaire qui suit est lui beaucoup plus utilisé et cela depuis la terminale.
Théorème (corollaire)	Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ ($b \geq a$) Soit m compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors $\exists ! x \in [a; b]$ tel que $f(x) = m$

Remarque	Quelles sont les différences entre ces deux théorèmes : - Le corollaire nécessite une hypothèse de plus : la stricte monotonie sur $[a ; b]$ - Le corollaire apporte un résultat de plus : Il n'existe cette fois qu'un seul x appartenant à l'intervalle $[a ; b]$ vérifiant $f(x) = c$												
Preuve													
Le TVI sous sa forme générale nous renseigne sur l'existence d'une solution x à l'équation $f(x) = c$ (Pour c compris entre $f(a)$ et $f(b)$). Supposons qu'il y en ait une autre : y . f étant strictement monotone sur $[a ; b]$ nous aurons $f(y) \neq f(x)$ donc impossibilité d'avoir $f(y) = f(x) = c$													
Remarque	La meilleure manière d'utiliser le TVI est encore de faire intervenir un bon vieux tableau de variations.												
Exercice	Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 - x)e^x$. Montrons que l'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions dans l'intervalle $[-10; 2]$												
Solution													
$\forall x \in [-10; 2] f'(x) = -e^x + e^x(2 - x) = e^x(1 - x)$ $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$													
f admet donc le tableau de variations suivant : Avec $a = 12e^{-10} ; b = e ; c = 0$	<table><tr><td>x</td><td>-10</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>f'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr><tr><td>f</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr></table>	x	-10	1	2	f'	$+$	0	$-$	f	a	b	c
x	-10	1	2										
f'	$+$	0	$-$										
f	a	b	c										
$1 \in [f(-10); f(1)]$, f strictement monotone sur $[-10; 2]$ donc d'après le corollaire du TVI $\exists ! x \in [-10; 2]$ tel que $f(x) = 1$ $1 \in [f(2); f(1)]$, f strictement monotone sur $[1; 2]$ donc d'après le corollaire du TVI $\exists ! y \in [1; 2]$ tel que $f(y) = 1$ Nous avons donc trouvé exactement deux solutions à l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[-10; 2]$													