Image d'un intervalle

Nous ne considérerons ici que les fonctions réelles.

Théorème	Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle
Remarque	Que signifie $f(I)$ est un intervalle ? Cela signifie que $f(I)$ est de la forme $[a; b]$, $]a; b[$, $]a; b]$ ou $[a; b[$ (Avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$) $f(I)$ ne peut pas se présenter sous la forme d'une réunion d'intervalles. $f(I)$ se présente donc sous la forme d'un seul bloc ….

Preuve

Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle il suffit de prendre deux valeurs x et y dans $f(I)$ $(x < y)$ et de vérifier que :
$[x\,; y] \subset f(I)$. Soit z une valeur dans l'intervalle $[x\,; y]$. Nous avons $x \leq z \leq y$
Or x et y sont dans $f(I)$ donc il existe a et b dans I tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. Donc $f(a) \leq z \leq f(b)$
f étant continue le TVI nous donne l'existence de c compris entre a et b tel que $z = f(c)$
I est un intervalle donc toute valeur comprise entre deux valeurs de I : a et b sera dans I. On a donc $c \in I$
On a donc démontré que $z = f(c)$ avec $c \in I$ donc $z \in f(I)$
Toute valeur intermédiaire entre x et y appartient donc aussi à $f(I)$
$f(I)$ est donc bien un intervalle

Exemples	• L'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par la fonction $x \text{−>} e^x$ est $[0\,; +\infty[$ • L'image de l'intervalle $\mathbb{R}^+$ par la fonction $x \text{−>} e^{-x}$est $[0\,; 1]$ • L'image de l'intervalle $]0; 1]$ par la fonction $x \text{−>} \frac{1}{x}$ est $[1\,; +\infty[$ • L'image de l'intervalle $]0; 1]$ par la fonction $x \text{−>} \ln x$ est $]-\infty\,; 0]$ Rien d'étonnant, ces fonctions sont bien continues sur leur ensemble de définition donc elles envoient des intervalles sur des intervalles. Que se passe-t-il avec une fonction non continue ? Prenons par exemple la fonction partie entière. Elle envoie l'intervalle $\mathbb{R}^+$ sur l'ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5 \dots \dots\}$ Cet ensemble $\{0; 1; 2; 3; 4; 5 \dots \dots\}$ n'est pas un intervalle. C'est une suite de valeurs.