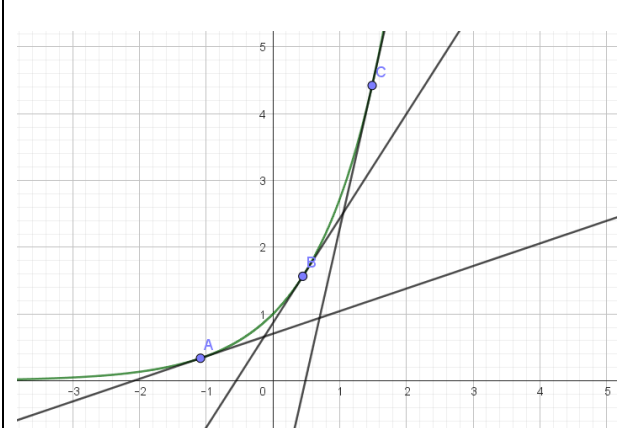


Convexité de fonctions	
Remarque	Nous avons dans un précédent document défini la convexité d'une fonction et caractérisé le positionnement d'une fonction convexe par rapport à ses cordes. Dans le cas où la fonction convexe est dérivable, nous allons aussi constater qu'elle se positionne d'une certaine manière par rapport à ses tangentes et que la dérivée est une fonction croissante.
Théorème	Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Les propositions suivantes sont équivalentes f est convexe sur I f' est croissante sur I. - Si f deux fois dérivable sur I, $f'' \geq 0$ - La courbe de f est située au dessus de ses tangentes.
Illustration	Nous avons ici représenté la courbe de la fonction exponentielle. Cette fonction deux fois dérivable possède une dérivée seconde positive sur $\mathbb{R}$. Cette dérivée seconde positive prouve la convexité de la fonction. Sont représentées en trois points distincts les tangentes à la courbe. Ces tangentes se situent en dessous de la courbe. 
Preuve	
$1 \Rightarrow 2$. Soit f convexe et dérivable sur I. Soient a, b et c dans I tels que $a < b < c$ Nous avons $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ (*) Faisons tendre b vers a dans cette inégalité (*). Nous obtenons $f'(a) \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$ Faisons tendre b vers c dans cette inégalité (*). Nous obtenons $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq f'(c)$ Nous avons donc montré que $f'(c) \geq f'(a)$. a et c ayant été choisis arbitrairement avec $a < c$ cela démontre que f' est croissante. $2 \Leftrightarrow 3$. Evident $2 \Rightarrow 4$. Soit $a \in I$. La tangente en a à la courbe de f a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ Etudions la fonction $\varphi: \begin{cases} I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - f'(a)(x - a) - f(a) \end{cases}$ De part sa construction φ est dérivable sur I. $\varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$ f' étant croissante sur I, nous avons $\varphi'(x) \geq 0$ ssi $x \geq a$. Si nous dressons le tableau de variation de φ, cela nous amène à φ décroissante pour $x \leq a$ et φ croissante sinon. φ admet donc un minimum sur I qui est $\varphi(a)$. $\varphi(a) = 0$. Nous en déduisons que φ est positive sur I ce qui entraîne que la courbe de f est au-dessus de ses tangentes. $4 \Rightarrow 1$. Soient α et β deux valeurs de I ($\alpha < \beta$) et $t \in [0; 1]$ tel que $a = t\alpha + (1 - t)\beta$. Donc $a \in [\alpha; \beta]$ Nous savons que la courbe de f est au-dessus de sa tangente en $x = a$ Nous avons donc $\forall x \in I, f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a) \Rightarrow f(a) \leq f(x) - f'(a)(x - a)$ En particulier $f(a) \leq f(\alpha) - f'(a)(\alpha - a)$ et $f(a) \leq f(\beta) - f'(a)(\beta - a)$ $\begin{cases} f(a) \leq f(\alpha) - f'(a)(\alpha - a) \\ f(a) \leq f(\beta) - f'(a)(\beta - a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(\alpha) + f'(a)(a - \alpha) \\ f'(a)(\beta - a) \leq f(\beta) - f(a) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(\alpha) + f'(a)(a - \alpha) \\ f'(a) \leq \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} f(a) \leq f(\alpha) + \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a}(a - \alpha) \\ f'(a) \leq \frac{f(\beta) - f(a)}{\beta - a} \end{cases} \Rightarrow f(a) \left(1 + \frac{a - \alpha}{\beta - a}\right) \leq f(\alpha) + f(\beta) \frac{(a - \alpha)}{\beta - a}$ $\Rightarrow f(a)(\beta - \alpha) \leq (\beta - a)f(\alpha) + f(\beta)(a - \alpha) \Rightarrow f(a) \leq \frac{(\beta - a)}{(\beta - \alpha)}f(\alpha) + f(\beta) \frac{(a - \alpha)}{(\beta - \alpha)} \quad (**)$ Or en revenant à la définition de a : $a = t\alpha + (1 - t)\beta$ On obtient $a = t(\alpha - \beta) + \beta \Rightarrow a - \beta = t(\alpha - \beta) \Rightarrow t = \frac{a - \beta}{\alpha - \beta}$. De même $1 - t = 1 - \frac{a - \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha - \beta - a + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - a)}{\alpha - \beta}$ Injectons ces résultats dans (**). Il vient $f(a) \leq tf(\alpha) + (1 - t)f(\beta)$. Nous avons donc montré que la fonction était convexe.	

Remarque	Bien entendu nous avons les équivalences symétriques : f concave $\Leftrightarrow f'$ décroissante $\Leftrightarrow$ le graphe de f est situé au-dessous de ses tangentes.		
Remarque	Cette propriété de positionnement de la courbe par rapport à ses tangentes nous donne plusieurs inégalités bien pratiques :		
	$\forall x \in \mathbb{R}^{**} \ln(1+x) \leq x$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) \geq 1-x$	$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$
	Preuve	Preuve	Preuve
	Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{**} f(x) = \ln(1+x)$ f deux fois dérivable. $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ Donc $f''(x) \leq 0$. f concave. La tangente à la courbe de f au point $x = 0$ a pour équation : $y = \frac{1}{1+0}(x-0) + \ln 1$ $\Rightarrow y = x$ f concave $\Rightarrow f$ au-dessous de ses tangentes. $\forall x \in \mathbb{R}^{**} \ln(1+x) \leq x$	Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \exp(-x)$ f deux fois dérivable. $f''(x) = \exp(-x)$ Donc $f''(x) \geq 0$. f convexe. La tangente à la courbe de f au point $x = 0$ a pour équation : $y = -\exp(-0)(x-0) + \exp(0)$ $\Rightarrow y = -x + 1$ f convexe $\Rightarrow f$ au-dessus de ses tangentes. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) \geq 1-x$	Soit f définie par $\forall x \in \mathbb{R} f(x) = \sin x$ f deux fois dérivable. $f''(x) = -\sin(x)$ Donc $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] f''(x) \leq 0$ f concave La tangente à la courbe de f au point $x = 0$ a pour équation : $y = \cos(0)(x-0) + \sin(0)$ $\Rightarrow y = x$ f concave $\Rightarrow f$ au-dessous de ses tangentes. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \sin x \leq x$ Les points $A(0; 0)$ et $B(\frac{\pi}{2}; 1)$ sont deux points de la courbe de f La droite (AB) a pour équation $y = (\frac{2}{\pi})x$ et est une corde pour la courbe de f f concave $\Rightarrow f$ au-dessus de ses cordes. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] (\frac{2x}{\pi}) \leq \sin x$ Nous avons bien $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}] \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$