Convexité de fonctions

Convexité de fonctions

Définition

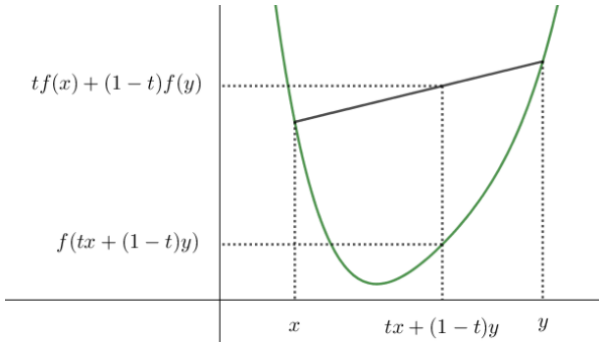
Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

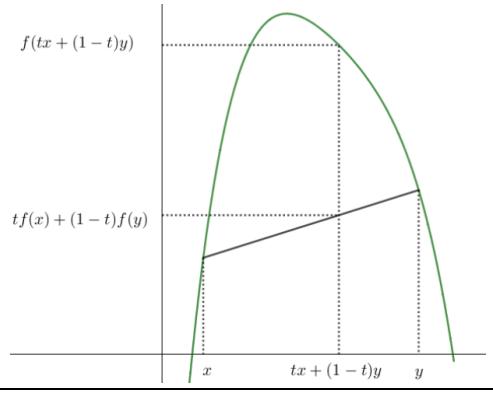
f est dite **convexe** sur I ssi $\forall (x,y) \in I^2$ $\forall t \in [0;1]$
$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(x)$

f est dite **concave** sur I ssi $\forall (x,y) \in I^2$
$\forall t \in [0;1]$
$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(x)$

Il est équivalent de dire que $-f$ est convexe.

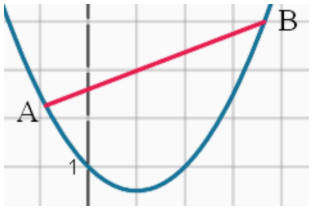
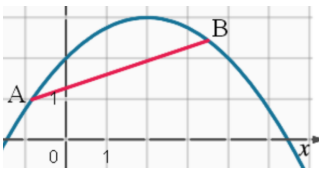
Illustration





Remarques

- Remarquons que lorsque t décrit l'intervalle $[0;1]$, $tx+(1-t)y$ décrit toutes les valeurs de l'intervalle $[x,y]$.
- La droite rejoignant deux points d'une même courbe est appelé une corde. Remarquons que lorsque l'on trace une corde entre deux points de la courbe d'une fonction convexe et entre deux points de la courbe d'une fonction concave on obtient deux résultats différents.

Fonction **convexe**		Fonction **concave**	
La courbe entre les points A et B est en dessous de la corde		La courbe entre les points A et B est au dessus de la corde	

C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient A et B deux points situés sur la courbe de f avec $x_A \in I$ et $x_B \in I$

Une fonction est dite **convexe** lorsque quelles que soient les positions de A et de B sur la courbe, la courbe sera située sous la corde (AB) entre les points A et B et au dessus de (AB) à l'extérieur.

Une fonction est dite **concave** lorsque quelles que soient les positions de A et de B sur la courbe, la courbe sera située au dessus de la corde (AB) entre les points A et B et au dessous de (AB) à l'extérieur.

Preuve

Soient $A(a,f(a))$ et $B(b,f(b))$ deux points quelconques sur la courbe.
Un point de la courbe situé entré A et B, a pour abscisse un réel x tel que $x = ta+(1-t)b$ avec $t \in [0;1]$
La corde entre le point A et le point B a pour équation :

$$y = mx + p$$

Le coefficient directeur m vaut $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Pour déterminer p nous savons que $f(a) = ma + p \Longrightarrow p = f(a) - ma = f(a) - \frac{(f(b)-f(a))a}{b-a} = \frac{f(a)b-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a}$

$p = \frac{f(a)b-af(b)}{b-a}$. L'équation de la droite (AB) est donc $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,x + \frac{f(a)b-af(b)}{b-a}$

L'ordonnée du point de la corde qui a pour abscisse : $x = ta+(1-t)b$

Est donc $y = \frac{(f(b)-f(a))(ta+(1-t)b)+f(a)b-af(b)}{b-a} = \frac{f(a)(-ta-(1-t)b+b)+f(b)(ta+(1-t)b-a)}{b-a} = \frac{f(a)t(b-a)+f(b)(1-t)(b-a)}{b-a}$

$$y = \boldsymbol{tf(a)+(1-t)f(b)}$$

Par contre l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse $x = ta+(1-t)b$ est $\boldsymbol{f(ta+(1-t)b)}$
Nous avons donc bien l'équivalence :
La corde (AB) est située au-dessus la courbe entre les points A et B ssi $\forall t \in [0;1]$ $\boldsymbol{tf(a)+(1-t)f(b) \geq f(ta+(1-t)b)}$
c'est-à-dire ssi f convexe.

Théorème	Soit f une fonction $I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ La fonction f est convexe ssi la fonction g: $\begin{Bmatrix} I-\{a\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{Bmatrix}$ est croissante.
Remarque	Remarquons que la fonction g donne le coefficient directeur de la corde passant par les points $A(x,f(x))$ et $B(a,f(a))$. Le théorème peut donc se libeller ainsi : la fonction f est convexe ssi la fonction g donnant le coefficient directeur des cordes de la fonction f passant par le point A est croissante. Reste à le démontrer

Preuve

- Supposons f convexe
  Soient x et y deux réels de $I-\{a\}$ avec $y > x$

  1. Si $a < x < y$ alors $\exists t \in [0;1]$ tel que $x = at + (1-t)y$
  f est convexe donc $f(x) \le tf(a) + (1-t)f(y) \Rightarrow f(x) - f(a) \le f(a)(t-1) + (1-t)f(y)$
  $\Rightarrow f(x) - f(a) \le (1-t)(f(y) - f(a))$
  Or $x - a = at - a + (1-t)y \Rightarrow x - a = a(t-1) + (1-t)y \Rightarrow x - a = (1-t)(y-a) \Rightarrow 1 - t = \frac{x-a}{y-a}$
  Nous avons donc $f(x) - f(a) \le \frac{x-a}{y-a}(f(y) - f(a)) \Rightarrow$ donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$
  $g(x) \le g(y)$, La fonction g est bien croissante

  2. Si $x < a < y$ alors $\exists t \in]0;1[$ tel que $a = tx + (1-t)y$
  f est convexe donc $f(a) \le tf(x) + (1-t)f(y) \Rightarrow tf(a) + (1-t)f(a) \le tf(x) + (1-t)f(y)$
  $\Rightarrow t\big(f(a) - f(x)\big) \le (1-t)\big(f(y) - f(a)\big)$ $(*)$

  Or $a = tx + (1-t)y \Rightarrow ta + (1-t)a = tx + (1-t)y \Rightarrow t(a-x) = (1-t)(y-a) \Rightarrow t = \frac{(1-t)(y-a)}{(a-x)}$
  Remplaçons t par cette expression dans $(*)$
  Il vient $\frac{(1-t)(y-a)}{(a-x)}\big(f(a) - f(x)\big) \le (1-t)\big(f(y) - f(a)\big) \Rightarrow \frac{(f(a)-f(x))}{(a-x)} \le \frac{(f(y)-f(a))}{(y-a)}$. Là encore la fonction g est croissante.

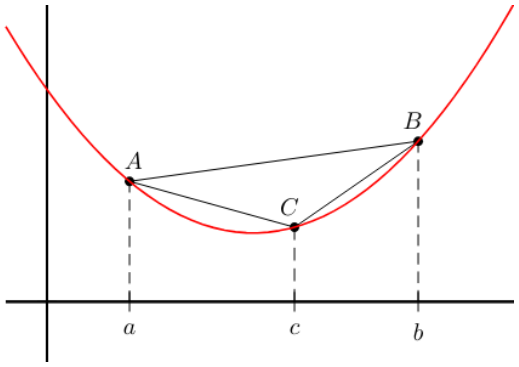
  3. Si $x < y < a$ alors $\exists t \in]0;1[$ tel que $y = tx + (1-t)a$
  f est convexe donc $f(y) \le tf(x) + (1-t)f(a) \Rightarrow f(y) - f(a) \le t(f(x) - f(a))$ $(**)$

  Or $y = tx + (1-t)a \Rightarrow t(x-a) = y - a \Rightarrow t = \frac{y-a}{x-a}$
  Remplaçons t par cette expression dans $(**)$
  Il vient $\big(f(y) - f(a)\big) \le \frac{y-a}{x-a}\big(f(x) - f(a)\big) \Rightarrow \frac{(f(y)-f(a))}{(y-a)} \ge \frac{(f(x)-f(a))}{(x-a)}$. (Inversion du signe car $y - a \le 0$)
  Là encore la fonction g est croissante.

  Bref dans tous les cas nous avons montré que f convexe $\Rightarrow$ g est croissante

- Supposons la fonction g croissante.
  Soient x et y deux réels de I avec $x < y$
  Soit $t \in [0;1]$ tel que $a = tx + (1-t)y$
  Si $t = 0$ $a = y$. Donc $f(a) = f(y)$ et on a bien $f(a) \le tf(x) + (1-t)f(y)$.
  Si $t = 1$ $a = x$. Donc $f(a) = f(x)$ et on a bien $f(a) \le tf(x) + (1-t)f(y)$.
  Si $t \in]0;1[$ nous avons $x < a < y$
  La fonction g: $\begin{Bmatrix} I-\{a\} \to \mathbb{R} \\ z \to \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \end{Bmatrix}$ est croissante. Donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$
  Donc $f(a)\left[\frac{1}{y-a} - \frac{1}{x-a}\right] \le \frac{f(y)}{y-a} - \frac{f(x)}{x-a} \Rightarrow f(a)\left[\frac{1}{y-a} + \frac{1}{a-x}\right] \le \frac{f(y)}{y-a} + \frac{f(x)}{a-x}$
  $\Rightarrow f(a)(a - x + y - a) \le f(y)(a-x) + f(x)(y-a)$ (Multiplication à droite et à gauche par $(y-a)(a-x)$)
  $f(a) \le f(y)\frac{(a-x)}{y-x} + f(x)\frac{(y-a)}{y-x}$ $(***)$. Or $a = tx + (1-t)y \Rightarrow a = t(x-y) + y \Rightarrow a - y = t(x-y) \Rightarrow t = \frac{y-a}{y-x}$
  $1 - t = 1 - \frac{y-a}{y-x} = \frac{y-x-y+a}{y-x} = \frac{a-x}{y-x}$
  Il vient dans $(***)$ $f(a) \le (1-t)f(y) + tf(x)$. Nous avons donc montré que dans tous les cas :
  $$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$$
  La fonction f est donc convexe.

Remarque	Bien entendu le théorème symétrique est : Soit f une fonction $I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$ La fonction f est concave ssi la fonction g: $\begin{Bmatrix} I-\{a\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{Bmatrix}$ est décroissante. La preuve est rigoureusement identique.

Théorème	Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Soient a, b et c trois valeurs de I avec $a < c < b$. Alors $\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$	
Remarque	Visuellement nous remarquons que les pentes des sécantes sont dans un ordre croissant de gauche à droite.	

Preuve

Soit $h_b : \begin{cases} I - \{b\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{cases}$. f est convexe. Donc h_b est croissante. $a < c$ donc $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Soit $i_a : \begin{cases} I - \{c\} \to \mathbb{R} \\ x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$. f est convexe. Donc i_a est croissante. $c < b$ donc $\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

En combinant les deux précédentes inégalités nous obtenons $\frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$