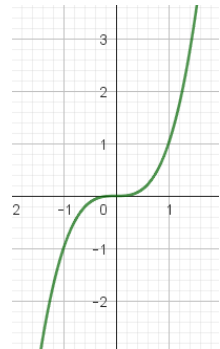
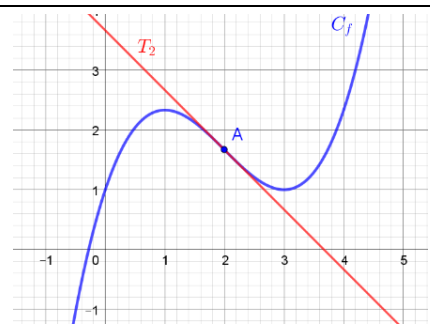


Convexité de fonctions

Convexité de fonctions. Point d'inflexion

Définition	Soit I un intervalle sur lequel une fonction f est définie. Soit x un point intérieur à I . (x ne peut être une borne de I) x est dit point d'inflexion de f s'il existe un réel $h > 0$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ convexe sur }]x - h; x] \text{ et concave sur }]x; x + h] \\ \text{ou} \\ f \text{ concave sur }]x - h; x] \text{ et convexe sur }]x; x + h] \end{array} \right\}$	
Remarque	Un point d'inflexion est donc un point où f change de convexité. Si elle était convexe avant elle devient concave et réciproquement.	
Exemple	Le point d'inflexion le plus célèbre est certainement 0 pour la fonction $f: x \rightarrow x^3$ f est concave sur $] - \infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$	
Propriété	Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I . x est un point d'inflexion de f ssi f'' s'annule en x en changeant de signe	
Preuve		
x est point d'inflexion de f s'il existe un réel $h > 0$ tel que : $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ convexe sur }]x - h; x] \text{ et concave sur }]x; x + h] \\ \text{ou} \\ f \text{ concave sur }]x - h; x] \text{ et convexe sur }]x; x + h] \end{array} \right\}$ Supposons f convexe sur $]x - h; x]$ et concave sur $]x; x + h]$ Nous avons donc $f'' \geq 0$ sur $]x - h; x]$ et $f'' \leq 0$ sur $]x; x + h]$ En particulier nous avons $f''(x) \geq 0$ et $f''(x) \leq 0$ ce qui implique : $f''(x) = 0$ f'' s'annule bien en changeant de signe en x . La réciproque est évidente.		
Remarque	Remarquons que pour $f(x) = x^3$, Nous avons $f''(x) = 6x$ Nous avons bien : $f'' \leq 0$ sur $] - \infty; 0] \Leftrightarrow f$ concave $f'' \geq 0$ sur $[0; +\infty[\Leftrightarrow f$ convexe - Et bien sur $f''(0) = 0$	
Propriété	Soit f une fonction définie et dérivable sur I . x est un point d'inflexion de f ssi la tangente à la courbe de f en x traverse la courbe de part en part.	
Preuve		
f convexe ssi le graphe de f est situé au-dessus de ses tangentes f concave ssi le graphe de f est situé au-dessous de ses tangentes Un changement de convexité en un point x signifie donc que les tangentes soient au-dessus (ou en dessous) de la courbe sur un intervalle $]x - h; x]$ et en dessous (ou au-dessus) de la courbe sur un intervalle $]x; x + h]$. La tangente en x doit cumuler les deux propriétés. (Elle doit être à la fois au-dessus et en dessous). Elle traverse donc la courbe. Réciproquement : si la tangente à la courbe de f en x traverse la courbe de part en part, cela signifie que f' admet un extrémum en x . f' est donc décroissante sur un intervalle $]x - h; x]$ et croissante sur un intervalle $]x; x + h]$ (ou l'inverse). Cela signifie donc que f change de convexité en f . Nous avons bien un point d'inflexion		