Convexité de fonctions

Convexité de fonctions. Inégalité de Jensen	
Théorème	Soit f une fonction définie et convexe sur un intervalle I. Soient $x_1, x_2, \dots\ x_n$: n valeurs de I Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_n$: n réels appartenant à $[0;1]$ tels que $\alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots\ \alpha_n = 1$ Alors $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots \alpha_n f(x_n)$
Remarque	Dans le cas où $n = 2$ nous retrouvons la définition de la convexité : $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ avec $\alpha_1 +\ \alpha_2 = 1$

Preuve

C'est une démonstration par récurrence.

- Initialisation : Dans le cas $n = 1$ ou $n = 2$ (vu plus haut) c'est évident.
- Hérédité : Supposons que pour n points $x_1, x_2, \dots\ x_n$ coefficientés avec les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_n$ $(\alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots\ \alpha_n = 1)$ appartenant à l'intervalle $[0;1]$ on ait bien

  $$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots \alpha_n f(x_n)$$

  Montrons que c'est aussi vrai à l'ordre $n + 1$

  Prenons $n + 1$ points $x_1, x_2, \dots\ x_{n+1}$ coefficientés avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots\ \alpha_{n+1}$ appartenant à $[0;1]$ tels que :

  $$\alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots\ \alpha_{n+1} = 1$$

  Quitte à re-étiqueter tous les points nous pouvons supposer que $\alpha_{n+1} > 0$ et donc $1 \geq \alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots\ \alpha_n > 0$

  Posons $A_n = \alpha_1 +\ \alpha_2 +\ \dots\ \alpha_n$ et $X_n = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n}{A_n}$.

  f est convexe donc $f(A_n X_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq A_n f(X_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$. En effet $A_n + \alpha_{n+1} = 1$ et $A_n \in [0;1]$

  Or $f(A_n X_n + \alpha_{n+1} x_{n+1}) =\ f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n+1} x_{n+1})$

  Donc nous avons : $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq A_n f(X_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$ $(*)$

  Essayons maintenant de majorer $f(X_n) = f(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n}{A_n})$

  Remarquons que $\frac{\alpha_1}{A_n} + \frac{\alpha_2}{A_n} + \cdots \frac{\alpha_n}{A_n} = 1$. Appliquons donc l'hypothèse de récurrence aux points $x_1, x_2, \dots\ x_n$ affectés des coefficients $\frac{\alpha_1}{A_n}, \frac{\alpha_2}{A_n}, \dots\ \frac{\alpha_n}{A_n}$

  Nous avons $f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_n x_n}{A_n}\right) \leq \frac{\alpha_1}{A_n} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{A_n} f(x_2) + \cdots\ \frac{\alpha_n}{A_n} f(x_n)$. Injectons cette relation dans $(*)$

  Il vient $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq A_n\ \left[\frac{\alpha_1}{A_n} f(x_1) + \frac{\alpha_2}{A_n} f(x_2) + \cdots\ \frac{\alpha_n}{A_n} f(x_n)\right] + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$

  $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \cdots \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$ qui est l'expression recherchée.