Dérivabilité

Définition

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. f est dite dérivable en a *ssi* la fonction $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite lorsque x tend vers a. Cette limite est appelée nombre dérivé au point a de f et est notée $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemple

- La fonction $x \to x^2$ admet un nombre dérivé en $x = 2$
  En effet $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^2}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$. $f'(2) = 4$
- La fonction $x \to |x|$ n'est pas dérivable en 0
  En effet nous avons $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x} = -1$
  f n'admet donc pas de limite en 0

Définition

La fonction f est dite dérivable sur un intervalle I *ssi* elle est dérivable en tout point de I. On appelle f' la fonction qui à tout $x \in I$ associe $f'(x)$

Exemples

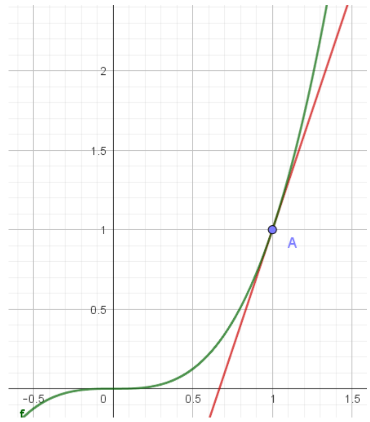
- La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- La fonction $x \to x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée f' vaut $f'(x) = nx^{n-1}$
  En effet $x^n - y^n = (x-y)(y^{n-1} + xy^{n-2} + \cdots x^{n-2}y + x^{n-1}y)$
  $\frac{x^n-y^n}{(x-y)} = y^{n-1} + xy^{n-2} + \cdots x^{n-2}y + x^{n-1}y$. Donc $\lim_{x\to y} \frac{x^n-y^n}{(x-y)} = y^{n-1} + y^{n-1} + \cdots y^{n-1} = ny^{n-1}$

Définition

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. On suppose f dérivable en a. La droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ est appelée tangente à la courbe de la fonction f en $x = a$

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$ et en particulier $f'(1) = 3$
Donc l'équation de la tangente à la courbe au point $x = 1$ est
$y = 3(x-1) + f(1) = 3x - 3 + 1 = 3x - 2$



Définition

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une fonction ε telle que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\,\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$

Propriété

Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. f est dérivable en a *ssi* elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a

Preuve

Soit f dérivable en a. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)$. On a donc $\lim_{x\to a} \left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] = 0$.
Nous pouvons écrire $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = g(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Il vient $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = g(x)(x-a)$
$\Rightarrow f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + g(x-a)(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} g(x-a) = 0$
Posons $h = x - a$. Cela nous amène à $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + g(h)h$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$.
Un sens de l'équivalence a donc été démontré.

Réciproquement. Posons $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + g(h)h$ avec $\lim_{h\to 0} g(h) = 0$
En posant $x = a + h$ Il vient $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + g(x-a)(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} g(x-a) = 0$
$\Rightarrow f(x) - f(a) = (x-a)f'(a) + g(x-a)(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} g(x-a) = 0$
$\Rightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + g(x-a)$ avec $\lim_{x\to a} g(x-a) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Le sens réciproque a été démontré

Propriété	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Preuve

Si f est dérivable en a alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + g(h)h$ avec $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = 0$
Il vient $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \Longrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a.

Définition	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. • On dit que f est dérivable à droite en a ssi $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On appelle ce nombre le nombre dérivé à droite de a que l'on note : $f'_d(a)$ • On dit que f est dérivable à gauche en a ssi $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe. On appelle ce nombre le nombre dérivé à gauche de a que l'on note : $f'_g(a)$
Exemple	Soit f la fonction valeur absolue. Nous avons comme vu précédemment $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$
Propriété	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$ en supposant qu'il existe un voisinage de a inclus dans D_f où f est bien définie. f dérivable en a ssi f dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Preuve

f dérivable en a ssi $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $existe\ c'est\ à\ dire\ ssi$ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existent et sont égaux

Exemple	La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$
Propriété	Soit $f: D_f \to \mathbb{C}$ et soit $a \in D_f$. f est dérivable en a ssi $Re(f)$ et $Im(f)$ le sont aussi.

Preuve

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = Re\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] + iIm\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] = \left[\frac{Re(f(x)) - Re(f(a))}{x-a}\right] + i\left[\frac{Im(f(x)) - Im(f(a))}{x-a}\right]$$

$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{C}$ ssi $\lim\limits_{x \to a} \frac{Re(f(x))-Re(f(a))}{x-a}$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{Im(f(x))-Im(f(a))}{x-a}$ existent