Dérivabilité. Point critique

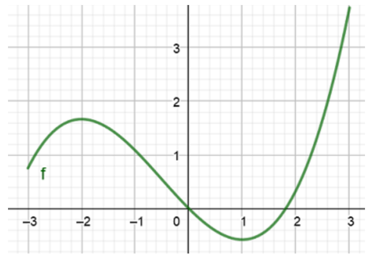
Définition

Soit f une fonction définie sur intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que :

- f admet un maximum local en $x \in I$ ssi
  $$\exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } \forall y \in V \cap I, f(y) \leq f(x)$$
- f admet un minimum local en $x \in I$ ssi
  $$\exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } \forall y \in V \cap I, f(y) \geq f(x)$$
- f admet un extremum local en $x \in I$ ssi f admet un maximum local ou un minimum local en x

Remarque

Un extremum local peut très bien ne pas être global.
Considérons la courbe de la fonction ci-contre définie sur $[-3\,;3]$.
Cette fonction admet un maximum local en $x = -2$ et un minimum local en $x = 1$ mais le maximum local n'est pas global.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{C}$.
Soit $x \in I$ tel que f dérivable en x

On dit que x est un point critique de f lorsque $f'(x) = 0$

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x \in I$ avec x intérieur à I. (x ne peut être égal à une borne de I)
Soit f une fonction définie sur I.

Si f admet un extremum local en x et f dérivable en x alors x est un point critique de f

Preuve

Supposons que f admette un maximum local en x.

Soit V le voisinage de x tel que $\forall y \in V \cap I, f(y) \leq f(x)$.

x étant un intérieur à I, il est possible de trouver V' voisinage de x tel que $V' \subset V \cap I$

Nous avons donc que $\forall y \in V', f(y) \leq f(x)$.

Or f est dérivable en x.

$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et vaut $f'_d(x)$. Pour h suffisamment petit $f(x+h) \in V'$. Donc $f(x+h) - f(x) \leq 0 \Longrightarrow f'_d(x) \leq 0$

$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ existe et vaut $f'_g(x)$. Pour h suffisamment petit $f(x+h) \in V'$. Donc $f(x+h) - f(x) \leq 0 \Longrightarrow f'_g(x) \geq 0$ (h est négatif car s'approche de 0 par valeurs négatives)

f étant dérivable en x nous avons $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x)$. Cela implique $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x) = 0$

x est bien un point critique de f

Remarque

Reprenons l'exemple de la fonction dont la courbe est donnée plus haut. Ce théorème nous renseigne sur le fait que $f'(-2) = f'(1) = 0$. -2 et 1 sont des points critiques de f