## Caractérisation d'une fonction à l'aide de sa dérivée.

**Remarque** : Vous avez eu l'habitude en terminale de manier des tableaux de variation où la fonction était croissante lorsque la dérivée était positive et décroissante lorsque la dérivée était négative. Nous redémontrons ici rigoureusement ces propriétés.

**Théorème** : Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I$. $f$ est constante sur $I$ $ssi$ $f' = 0$ sur $I$

### Preuve

- Si $f$ est constante. Alors essayons de calculer le nombre dérivé en un point de $I$. Soit $x \in I$
  Nous avons $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ (En effet $\forall x, \forall h, f(x+h) - f(x) = 0$). Nous en déduisons que $f'$ est nulle sur $I$
- Si $f' = 0$ sur $I$. Soient $a$ et $b$ deux points de $I$. $f$ est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$
  Le théorème des accroissements finis nous donne : $\exists c \in ]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) = 0$
  Nous avons donc $f(b) = f(a)$. La fonction est constante sur $I$

**Théorème** : Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I$. $f$ est croissante sur $I$ $ssi$ $f'$ positive sur $I$. $(f' \geq 0)$

### Preuve

Soit $x \in I$. $f$ est dérivable en $x$. Supposons $f$ croissante sur $I$.
Si $x$ est intérieur à $I$ (I n'est pas une borne de $I$) alors Pour $h > 0$ les deux nombres : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et $\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$ sont positifs car $f$ est croissante. Or ces deux nombres désignent lorsque $h$ tend vers $0$ : $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ qui seront aussi positifs. $f$ est dérivable en $x$ donc $f'_d(x) = f'_g(x) = f'(x)$ ce qui nous amène à $f'(x) \geq 0$
Si $x$ est une borne de $I$ (par exemple $x = 3$ pour $I = [3;4]$) alors $f'(x)$ sera égal à $f'_d(x)$ ou à $f'_g(x)$. Mais dans les deux cas, pour les mêmes raisons que précédemment ces quantités sont positives. Nous en déduisons que $f'(x) \geq 0$

Réciproquement : supposons que $f' \geq 0$ sur $I$.
Soient $x$ et $y$ deux éléments de $I$ tels que $y \geq x$
$f$ est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x\,;y[$
L'égalité des accroissements finis nous donne : $\exists c \in ]x\,;y[$ tel que :

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \Longrightarrow f(y) = f(x) + f'(c)(y-x)$$

$f'(c) \geq 0$ et $y - x \geq 0$ nous avons donc $f(y) \geq f(x)$. Ce qui démontre que la fonction est croissante sur $I$

**Remarques** :
- Bien entendu ce théorème se lit aussi ainsi :
  Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I$. $f$ est décroissante sur $I$ $ssi$ $f'$ négative sur $I$. $(f' \leq 0)$
  La preuve est symétrique.
- Pour utiliser le corollaire du TVI appliqué aux fonctions strictement monotones il faut …. montrer que la fonction est strictement monotone sur un intervalle. Or pour l'instant nous ne pouvons montrer que la croissance ou la décroissance de $f$ (selon si $f' \geq 0$ ou $\leq 0$). Il nous manque donc un théorème. Le voici :

**Théorème** : Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I$. $f$ est strictement croissante sur $I$ $ssi$ $f'$ positive sur $I$ $(f' \geq 0)$ et $f'$ non identiquement nulle sur tout intervalle de la forme $[a;b]$ inclus dans $I$.

**Remarque** :
- Certains d'entre vous s'attendaient peut-être à ce qu'une condition nécessaire et suffisante à la stricte croissance soit $f' > 0$ sur $I$. Ce n'est pas le cas. Une fonction $f$ peut avoir sa dérivée qui s'annule en quelques valeurs isolées tout en étant strictement croissante. C'est le cas par exemple de la fonction : $x \to x^3$ Cette fonction a une dérivée $x \to 3x^2$ qui s'annule en $0$. Pourtant la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- Néanmoins si $f' > 0$ alors nous sommes surs que $f$ sera strictement croissante. $f' > 0$ est une conditions suffisante à la stricte croissance.

### Preuve

- Supposons $f$ strictement croissante sur $I$. Alors nous savons que $f' \geq 0$ sur $I$. Si $f'$ nulle sur un intervalle $[a\,;b]$ de $I$, alors comme vu précédemment cela signifie que $f$ est constante sur $[a\,;b]$. Elle ne peut donc pas être strictement croissante sur $I$. Nous en déduisons que $f'$ ne peut être nulle sur un intervalle $[a\,;b]$ de $I$.
- Supposons que $f' \geq 0$ et soit non identique nulle sur tout intervalle de la forme $[a\,;b]$.
  Nous savons déjà que cela implique $f$ croissante sur $I$. Supposons qu'il existe $x$ et $y$ dans $I$ $(y > x)$ tels que $f(y) = f(x)$. $f$ étant croissante sur $I$, cela signifierait que $f$ constante sur $[x, y]$ et donc que $f'$ soit nulle sur $[x, y]$.
  Nous sommes donc en contradiction avec les hypothèses de l'énoncé. Nous en déduisons qu'il ne peut exister $x$ et $y$ dans $I$ $(y > x)$ tels que $f(y) = f(x)$. $f$ est donc strictement croissante sur $I$.

**Remarque** : Bien entendu ce théorème se lit aussi ainsi :
Soit $f: I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I$. $f$ est strictement décroissante sur $I$ $ssi$ $f'$ négative sur $I$ $(f' \leq 0)$ et $f'$ non identiquement nulle sur tout intervalle de la forme $[a;b]$ inclus dans $I$.
La preuve est symétrique.