Dérivées successives	
Définitions	Soit f une fonction. Soit I un intervalle. • Si f est dérivable sur I nous noterons f' sa fonction dérivée. • Si f' est dérivable sur I, nous noterons f'' sa fonction dérivée. ($f''=(f')'$) • Si f'' est dérivable sur I, nous noterons f''' sa fonction dérivée. ($f'''=(f'')'$) • ….. • De manière générale nous noterons si elle est définie $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k. $f^{(k)}=\left(f^{(k-1)}\right)'$
Exemple	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^3-2x^2+7x-2$ • f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=9x^2-4x+7$ • f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x)=18x-4$ • f'' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(3)}(x)=18$ • $f^{(3)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(4)}(x)=0$
Définition	• Nous nommerons $C^0(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$ • Nous nommerons $C^1(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dont la dérivée est continue sur I • Nous nommerons $C^2(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dont la dérivée seconde est continue sur I • …. • Nous nommerons $C^k(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dont la dérivée $kième$ est continue sur I • Nous nommerons $C^\infty(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dont la dérivée d'ordre quelconque reste continue sur I
Remarque	• Par extension nous dirons qu'une fonction f est de classe C^k lorsqu'elle est k fois dérivable et que sa dérivée d'ordre k est continue. • Soit $f\in C^k(I,\mathbb{C})$ et $n\in\mathbb{N}$. $f^{(k)}\in C^n(I,\mathbb{C}) \Longrightarrow f\in C^{k+n}(I,\mathbb{C})$

Opérations et dérivées successives	
Propriétés	Soient f et g deux fonctions de classe C^k. Alors toute combinaison linéaire de f et de g est aussi de classe C^k.

Preuve

Si f et g sont k-fois dérivables alors $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ $\lambda f+\mu g$ est aussi k-fois dérivable
De plus si $f^{(k)}$ et $g^{(k)}$ sont continues alors $\lambda f^{(k)}+\mu g^{(k)}$ est aussi continue. Nous en déduisons que $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ $\lambda f+\mu g$ est aussi de classe C^k.

Propriétés	Soient f et g deux fonctions de classe C^k. Alors la fonction produit (fg) est aussi de classe C^k. De plus (Formule de Leibnitz) $(fg)^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k-i)}$

Preuve

Le raisonnement est un raisonnement par récurrence :
$P(k)$: Si f et g sont de classe C^k alors la fonction produit (fg) est aussi de classe C^k et $(fg)^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k-i)}$

Initialisation : Pour $k=0$, il est évident que si f et g sont continues alors (fg) est aussi continue. De plus la formule de Leibnitz fonctionne pour $k=0$

Hérédité : Supposons que pour $l\leq k$ donné, f et g sont de classe C^l $\Longrightarrow\left\{\begin{matrix} fg \text{ de classe } C^l \\ (fg)^{(l)}=\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}f^{(i)}g^{(l-i)}\end{matrix}\right\}$

Montrons la propriété au rang $k+1$.
Soient f et g de classe C^{k+1}. Alors f et g sont de classe C^k. Donc fg est de classe C^k donc $(fg)^{(k)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k-i)}$
pour $1\leq i\leq k$ $f^{(i)}g^{(k-i)}$ est le produit de fonctions au moins C^1. Donc d'après l'hypothèse de récurrence tous les $f^{(i)}g^{(k-i)}$ sont C^1 et $\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i}f^{(i)}g^{(l-i)}$ étant une combinaison linéaire de ces fonctions l'est aussi. Donc $(fg)^{(k)}$ est C^1 ce qui implique fg de classe C^{k+1}. Nous pouvons donc dériver $(fg)^{(k)}$ et essayer de démontrer la formule de Leibnitz au rang $k+1$

$$(fg)^{(k+1)} = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}\right)' = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i)} g^{(k-i)}\right)' = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k+1-i)}\right)$$
$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i+1)} g^{(k-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$
$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k+1-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$
$$(fg)^{(k+1)} = \binom{k}{0} f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right] f^{(i)} g^{(k+1-i)} + \binom{k}{k} f^{(k+1)} g^{(0)}$$
$$(fg)^{(k+1)} = f g^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k} \left[\binom{k+1}{i}\right] f^{(i)} g^{(k+1-i)} + f^{(k+1)} g$$
$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} \left[\binom{k+1}{i}\right] f^{(i)} g^{(k+1-i)}.$$

La formule de Leibnitz est donc démontrée au rang $k+1$. Elle est donc vraie pour tout k

Propriété	Soient f une fonction de classe C^k ne s'annulant pas. Alors la fonction produit $(\frac{1}{f})$ est aussi de classe C^k.

Preuve

La encore c'est une récurrence. $P(k)$: Si f est de classe C^k ne s'annulant pas alors la fonction $(\frac{1}{f})$ est aussi de classe C^k.

Initialisation : Pour $k = 0$, il est évident que si f continue, ne s'annulant pas alors $(\frac{1}{f})$ est aussi continue.

Hérédité : Supposons que pour $l \leq k$ donné, f de classe C^l ne s'annulant pas $\Rightarrow \frac{1}{f}$ de classe C^l

Montrons la propriété au rang $k+1$

Soit f de classe C^{k+1} ne s'annulant pas. $-\frac{f'}{f^2}$ est le quotient de fonctions au moins C^k donc d'après l'hypothèse de récurrence $-\frac{f'}{f^2}$ est de classe C^k. Or $-\frac{f'}{f^2} = \left(\frac{1}{f}\right)'$ donc $\frac{1}{f}$ est de classe C^{k+1}

Propriété	Soient f et g deux fonctions de classe C^k (g ne s'annulant pas). Alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi de classe C^k

Preuve

Nous savons que $\left\{\begin{matrix} g \in C^k \\ g \text{ ne s'annule pas}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{g} \in C^k$ et nous savons aussi que $\left\{\begin{matrix} f \in C^k \\ \frac{1}{g} \in C^k\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{f}{g} \in C^k$

Donc $\frac{f}{g} \in C^k$

Propriété	Soit $g \in C^k(I,J)$ et $f \in C^k(J,\mathbb{C})$. Alors la fonction $fog \in C^k(I,\mathbb{C})$.

Preuve (Pas exigible)

Là encore c'est une récurrence. $P(k)$: Si $g \in C^k(I,J)$ et $f \in C^k(J,\mathbb{C})$. Alors la fonction $fog \in C^k(I,\mathbb{C})$.
Initialisation : Pour $k = 0$, il est évident que si g continue de I dans J et f continue de J dans $\mathbb{C}$ alors fog est aussi continue de I dans $\mathbb{C}$
Hérédité : Supposons que pour $l \leq k$ donné, $g \in C^l(I,J)$ et $f \in C^l(J,\mathbb{C}) \Rightarrow fog \in C^l(I,\mathbb{C})$
Montrons la propriété au rang $k+1$
Supposons $g \in C^{k+1}(I,J)$ et $f \in C^{k+1}(J,\mathbb{C})$.
Considérons $f'og * g'$. $f'og$ est la composée de fonctions au moins C^k donc d'après l'hypothèse de récurrence $f'og \in C^k(I,\mathbb{C})$. $g' \in C^k(I,J)$. Donc $f'og * g' \in C^k(I,\mathbb{C})$.
Or $f'og * g' = (fog)'$. Nous en déduisons que $fog \in C^{k+1}(I,\mathbb{C})$.

Propriété	Soit $f \in C^k(I,J)$, f bijective de I dans J et f' ne s'annulant pas sur I. Alors $f^{-1} \in C^k(J,I)$.

Preuve (Pas exigible)

c'est encore une récurrence. $P(k)$: Si f bijective de I dans J et f' ne s'annulant pas sur I. Alors $f^{-1} \in C^k(J,I)$.
Initialisation : Pour $k = 0$, il est évident que si f continue et bijective de I dans J alors f^{-1} est aussi continue de J dans I

Hérédité : Supposons que pour $l \leq k$ donné, $\left\{\begin{matrix} f \in C^l(I,J) \\ f\ bijective \\ f'ne\ s'annule\ pas\ sur\ I\end{matrix}\right\} \Rightarrow f^{-1} \in C^l(J,I)$

Montrons la propriété au rang $k+1$
Supposons $f \in C^{k+1}(I,J)$, f bijective et f' ne s'annule pas sur I.
Considérons $\frac{1}{f'o\,f^{-1}}$. $f' \in C^k(I,J)$ et f étant C^k, $f^{-1} \in C^k(J,I)$ d'après l'hypothèse de récurrence. La composée de ces deux fonctions est donc aussi C^k et leur inverse vu que f' ne s'annule pas est aussi C^k
Nous avons donc $\frac{1}{f'o\,f^{-1}} \in C^k(J,I)$. Or $\frac{1}{f'o\,f^{-1}} = (f^{-1})'$. Nous en déduisons donc que $f^{-1} \in C^{k+1}(J,I)$