Opérations sur les dérivées.

Propriétés

Soient f et g définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivables en un point $a \in I$
Soient λ et μ deux constantes de $\mathbb{C}$
Alors les fonctions $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en a
De plus $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

Preuve

- $\frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)}{x-a} = \lambda \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \mu \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$
  $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(a)}{x-a} = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$

  $(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a)$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

- $f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a) = f(x)\big(g(x) - g(a)\big) + g(a)\big(f(x) - f(a)\big)$
  $$\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} = f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + g(a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
  $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = f(a)\, g'(a) + g(a) f'(a)$

Propriété

Soient f et g définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et dérivables en un point $a \in I$. Supposons que $g(a) \neq 0$
Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Preuve

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{1}{x-a}\frac{\big(f(x)g(a) - f(a)g(x)\big)}{g(x)g(a)} = \frac{1}{x-a}\frac{\big(f(x)g(a) - f(a)g(x)\big)}{g(x)g(a)} =$$
$$\frac{1}{x-a}\frac{\big(f(x)g(a) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(a)g(x)\big)}{g(x)g(a)} = f(x)\frac{\big(g(a)-g(x)\big)}{(x-a)g(x)g(a)} + g(x)\frac{\big(f(x)-f(a)\big)}{(x-a)g(x)g(a)}$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x)-\left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} = -\frac{f(a)g'(a)}{g(a)^2} + \frac{g(a)f'(a)}{g(a)^2} = \frac{g(a)f'(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}$

Propriété

Soit g une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit f une fonction définie sur $g(I)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.
Soit $a \in I$.
Supposons que g soit dérivable en a et f dérivable en $g(a)$
Alors fog est dérivable en a et $(fog)'(a) = f'(g(a)) * g'(a)$

Preuve

$$\frac{fog(x) - fog(a)}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x-a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x)-g(a)} * \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$ et $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(g(x))-f(g(a))}{g(x)-g(a)} = \lim\limits_{X\to g(a)} \frac{f(X)-f(g(a))}{X-g(a)} = f'(g(a))$

Donc $\lim\limits_{x\to a} \frac{fog(x)-fog(a)}{x-a} = f'\big(g(a)\big) * g'(a)$

Propriété

Soit f une fonction réelle, bijective sur un intervalle I à valeurs dans $J = f(I)$.
Soit $a \in J$. On suppose que f dérivable en $f^{-1}(a)$ et que $f'(f^{-1}(a)) \neq 0$ alors
f^{-1} est dérivable en a et $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

Preuve

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)}{fof^{-1}(x)-fof^{-1}(a)}$; Or $\lim\limits_{x\to a} \frac{fof^{-1}(x)-fof^{-1}(a)}{f^{-1}(x)-f^{-1}(a)} = f'(f^{-1}(a))$

Donc f^{-1} est dérivable en a et $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$

Remarque

Le choix a été fait ici de calculer le nombre dérivé de f en un point. Si la fonction est dérivable sur un intervalle, il est évident que ces calculs restent valables sur l'intervalle tout entier