Division euclidienne

Théorème	Soit a un entier relatif et b un entier natuel non nul. Il existe un seul couple (q, r) appartenant à $\mathbb{Z}$x$\mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ b est nommé le diviseur de la division euclidienne, a le dividende, q le quotient et r le reste.

Preuve

Démontrons d'abord **l'existence**
Supposons $a > 0$
Si $b > a$ alors $a = 0 * b + a$ et l'existence de q et r est trouvée
Si $b = a$ alors $a = 1 * b + 0$ et là encore l'existence de q et r est trouvée
Si $b < a$ alors posons n le plus petit entier naturel tel que $nb \geq a$.
Nous avons $(n-1)b < a \leq nb$ (*)

$$a = (n-1)b + a - (n-1)b$$

Posons $q = (n-1)b$ et $r = a - (n-1)b$
D'après $(*)$ $0 < r < b$ donc là encore le couple (q, r) est trouvé.
Supposons maintenant $a = 0$. $0 = b * 0 + 0$. Le couple $(0,0)$ convient parfaitement.
Supposons maintenant $a < 0$. Nous avons alors l'existence d'un couple (q, r) pour $-a$.

$$-a = bq + r \Longrightarrow a = b * (-q) - r = (-q - 1)b - r + b$$

En posant $q' = -q - 1$ et $r' = -r + b$ il vient $a = q' * b + r'$ avec $q' \in \mathbb{Z}$. De plus la division euclidienne appliquée à $-a$ nous donnait $r < b$ donc $r' > 0 \Longrightarrow r' \in \mathbb{N}$. Il paraît évident de plus que $r' < b$. Nous avons là encore l'existence d'un tel couple.

Unicité :
Supposons deux couples (q, r) et (q', r') tels que $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 < r < b$ et $0 < r' < b$
Il vient en soustrayant les deux égalités $b(q - q') + r - r' = 0 \Longrightarrow b(q - q') = r' - r$
Nous avons alors $b \mid (r' - r)$ ce qui est impossible puisque $|r' - r| < b$

Conclusion il existe un seul couple (q, r) appartenant à $\mathbb{Z}$x$\mathbb{N}$ tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$

Remarque	Le thèorème de la division euclidienne peut aussi se lire avec les congruences. Soit a un entier relatif et b un entier natuel non nul. Alors $a \equiv r\ [b]$, r étant le reste de la division euclidienne de a par b
Exemple	Démontrons que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 pour tout n entier naturel $2^4 = 16 = 3 * 5 + 1 \Longrightarrow 2^4 = 1[5] \Longrightarrow 2^{4n} = 1[5] \Longrightarrow 2^{4n+1} = 2[5]$ $3^4 = 81 = 16 * 5 + 1 \Longrightarrow 3^4 = 1[5] \Longrightarrow 3^{4n} = 1[5] \Longrightarrow 3^{4n+1} = 3[5]$ Donc $2^{4n+1} + 3^{4n+1} = 2 + 3[5] = 0[5]$