Calcul type de primitive

Méthode	Nous allons ici déterminer les primitives de fonctions du type $x \to \frac{1}{x^2+bx+c}$. Nous allons pour cela calculer $\int_a^x \frac{1}{t^2+bt+c}\,dt$ en supposant que la fonction $t \to \frac{1}{t^2+bt+c}$ soit continue sur $[a, x]$ Pour déterminer ces primitives il faut d'abord factoriser le polynôme du second degré $x^2 + bx + c$. Trois cas se présentent suivant le discriminant de ce polynôme qui mènent à trois méthodes de calculs de primitives différentes.

Exemple 1

$$I = \int_a^x \frac{1}{t^2 - 3t + 2}\,dt$$

$$t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$$
$$I = \int_a^x \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,dt$$

$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$$
$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A(t-2) + B(t-1)}{(t-1)(t-2)}$$
$$\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{t(A+B) - 2A - B}{(t-1)(t-2)}$$

Il vient par identification $B = 1, A = -1$

$$I = \int_a^x \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,dt$$
$$I = \int_a^x \frac{1}{t-2}\,dt - \int_a^x \frac{1}{t-1}\,dt$$
$$I = [ln|t-2|]_a^x - [ln|t-1|]_a^x$$
$$I = ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + cste$$

Exemple 2

$$J = \int_a^x \frac{1}{t^2 - 2t + 1}\,dt$$

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$
$$J = \int_a^x \frac{1}{(t-1)^2}\,dt$$

$$J = \left[-\frac{1}{t-1}\right]_a^x = -\frac{1}{x-1} + cste$$

Exemple 3

$$K = \int_a^x \frac{1}{t^2 - 2t + 3}\,dt$$

$t^2 - 2t + 2$ ne se factorise pas.

$$\begin{aligned} t^2 - 2t + 2 &= (t-1)^2 - 1 + 3 \\ &= (t-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

$$K = \int_a^x \frac{1}{(t-1)^2 + 2}\,dt$$

$$K = \frac{1}{2}\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dt$$

$$K = \frac{1}{2}\int_a^x \frac{1}{\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}\,dt$$

Changement de variable : $\varphi(t) = \frac{t-1}{\sqrt{2}}$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$K = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_a^x \frac{1}{\varphi^2(t) + 1}\varphi'(t)dt$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{a-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{x-1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + cste$$

Calcul type de primitive

Méthode

Nous allons ici déterminer les primitives de fonctions du type $x \to e^{ax}\cos bx$ ou $x \to e^{ax}\sin bx$. Nous commençons par remarquer que ces deux fonctions sont respectivement les parties réelles et imaginaires de la fonction $x \to e^{ax}e^{ibx}$ soit $x \to e^{(a+ib)x}$. Primitiver ces deux fonctions revient donc à primitiver la fonction $x \to e^{(a+ib)x}$

Cas 1

$$\int_c^x e^{at}\cos bx \ dt = \int_c^x Re\left(e^{(a+ib)t}\right) dt = Re\left(\int_c^x e^{(a+ib)t}dt\right)$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{1}{a+ib}\left[e^{(a+ib)t}\right]_c^x$$

$$= \frac{1}{a+ib}\left[e^{(a+ib)x} - e^{(a+ib)c}\right]$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + K \text{ avec } K \in \mathbb{C}$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} + K$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = e^{ax}\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}(\cos bx + i\sin bx) + K$$

$$Re\left(\int_c^x e^{(a+ib)t}dt\right) = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + cste$$

Donc une primitive de $x \to e^{ax}\cos bx$ est :

$$x \to \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + cste$$

Cas 1

$$\int_c^x e^{at}\sin bx \ dt = \int_c^x Im\left(e^{(a+ib)t}\right) dt = Im\left(\int_c^x e^{(a+ib)t}dt\right)$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{1}{a+ib}\left[e^{(a+ib)t}\right]_c^x$$

$$= \frac{1}{a+ib}\left[e^{(a+ib)x} - e^{(a+ib)c}\right]$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + K \text{ avec } K \in \mathbb{C}$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} + K$$

$$\int_c^x e^{(a+ib)t}dt = e^{ax}\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}(\cos bx + i\sin bx) + K$$

$$Im\left(\int_c^x e^{(a+ib)t}dt\right) = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + cste$$

Donc une primitive de $x \to e^{ax}\sin bx$ est :

$$x \to \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + cste$$

Ces deux formules ne sont bien entendu pas faites pour être apprises par cœur. Elles sont à retrouver lors d'exercices.