Exemples de calculs de limite	
Dans l'ensemble de ces exercices l'enjeu consiste à lever la forme indéterminée	
Exercice1	Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}*\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$; Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=0$

Exercice2	Déterminer $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}$

$$\frac{2^x-1}{\sin x}=\frac{e^{xln2}-1}{\sin x}=\frac{e^{xln2}-e^{0*ln2}}{x-0}*\frac{x-0}{sinx-\sin 0}$$

Soit f définie par $f(x)=e^{xln2}$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{xln2}-e^{0*ln2}}{x-0}=f'(0)=ln2$
Soit g définie par $g(x)=\sin x$. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=g'(0)=1$

Donc $\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{\sin x}=\frac{f'(0)}{g'(0)}=\frac{ln2}{1}=ln2$

Exercice3	Déterminer $\lim_{x\to0^+}xln(sinx)$

$$xln(sinx)=\frac{xsinxln(sinx)}{\sin x}=\ sinxln(sinx)*\frac{x}{\sin x}$$

Soit f la fonction définie par $f(x)=xln\ x$
$sinxln(sinx)=f(\sin\ x)$. $\lim_{x\to0}\sin x=0$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$. Donc $\lim\limits_{x\to0}f(\sin x)=0$
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=1$ (déjà vu plus haut)
Donc $\lim_{x\to0^+}xln(sinx)=0$

Exercice 4	Déterminer $\lim_{x\to0}\frac{2}{sin^2x}-\frac{1}{1-\cos x}$

$$\frac{2}{sin^2x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{2}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{2}{(1-\cos x)(1+\cos x)}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{1-\cos x}\left[\frac{2}{(1+\cos x)}-1\right]$$

$=\frac{1}{1-\cos x}\left[\frac{2-1-\cos x}{(1+\cos x)}\right]=\frac{1}{(1+\cos x)}$
Donc $\lim_{x\to0}\frac{2}{sin^2x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{1}{2}$

Exercice 5	Momtrer que les seules fonctions de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x,y)\ \in\mathbb{R}^{*2}\ \lvert f(x)-f(y)\rvert\le\frac{1}{x+y}$ sont les fonctions constantes

Fixons y. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\lvert f(x)\rvert\le\lvert f(x)-f(y)\rvert+\lvert f(y)\rvert\le\frac{1}{x+y}+\lvert f(y)\rvert\le\frac{1}{y}+\lvert f(y)\rvert$. Donc la fonction f est bornée.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+y}=0$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\lvert f(x)-f(y)\rvert=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(y)$.
Toute limite étant unique nous avons donc montré que la fonction f était constante sur $\mathbb{R}^*$
Réciproquement si f est constante alors $\forall(x,y)\ \in\mathbb{R}^{*2}\ \lvert f(x)-f(y)\rvert=0$ et $\forall(x,y)\ \in\mathbb{R}^{*2}\ 0\le\frac{1}{x+y}$

Exercice 6	• Soit g une fonction périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convergeant en $+\infty$. Montrer que g est constante • Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f converge en $+\infty$, $f+g$ croissante, g périodique Montrons que g constante

- Soit T la période de g et n un entier quelconque. $\forall x \in \mathbb{R}, g(x+nT) = g(x)$
  $\lim_{n\to+\infty} g(x+nT) = l$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = l$. g est constante
- Soit l tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. $f+g$ étant croissante nous avons vu d'après le théorème de la limite montone pour les fonctions que $\lim_{x\to+\infty} f+g$ existe et qu'elle appartient à $\mathbb{R} \cup +\infty$
  Si $\lim_{x\to+\infty} f+g \in \mathbb{R}$ alors vu la convergence de f nous avons la convergence de g ce qui d'après la question précédente nous donne le fait que g est constante
  Si $\lim_{x\to+\infty} f+g = +\infty$ alors vu la convergence de f nous en déduisons $\lim_{x\to+\infty} g = +\infty$ alors soit T la période de g, nous avons $\forall x \in \mathbb{R}$ $g(x) = g(x+nT)$ ce qui en faisant tendre n vers $+\infty$ nous amène à $g(x) = +\infty$
  Nous sommes donc arrivés à une contradiction. Le seul cas possible est : $\lim_{x\to+\infty} f+g \in \mathbb{R}$ ce qui nous amène à g constante

Exercice 7	Soit f une fonction T périodique telle que f converge en ∞. Montrer que f est constante

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(x+nT)$ ce qui en faisant tendre n vers $+\infty$ nous amène à $f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$
Ceci étant vrai pour tout x, nous avons démontré la constance de f

Exercice 8	Soient a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ et $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ une foncton croissante. Montrer que l'application $\varphi: x \to \lim_{y\to x^+} f(x)$ est croissante

Nous savons déjà d'après un théorème du cours que cette application est définie. En effet f étant croissante sur $\mathbb{R}$, nous avons quelque soit $x \in \mathbb{R}$ l'existence de $\lim_{z\to x^+} f(z)$ et de $\lim_{y\to z^-} f(z)$ avec $\lim_{z\to x^-} f(z) \leq f(x) \leq \lim_{z\to x^+} f(z)$
Soient x et y deux réels avec $y > x$ nous avons $f(x) \leq \lim_{z\to x^+} f(z)$, $f(y) \leq \lim_{z\to y^+} f(y)$ et $\lim_{z\to x^+} f(z) \leq f(y)$ (En effet $\lim_{z\to x^+} f(z) = \inf f(]x,y])$).
Nous avons donc $f(x) \leq \lim_{z\to x^+} f(z) \leq f(y) \leq \lim_{z\to y^+} f(z) \Longrightarrow f(x) \leq \varphi(x) \leq f(y) \leq \varphi(y)$
Ce qui démontre que l'application φ est bien croissante.