

Exercice 1

Soit E la fonction partie entière.

Etude de la fonction $f: x \rightarrow E(x) + \sqrt{x - E(x)}$. Montrons que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

Solution

Remarquons déjà que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. En effet $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x$, donc $x - E(x) \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. $\forall x \in]n, n+1[$ $E(x) = n$

Donc $\forall x \in]n, n+1[$ $f(x) = n + \sqrt{x - n}$. f est donc continue sur $]n, n+1[$

$f(n) = n$ et $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n$

$\forall x \in]n-1, n[$ $f(x) = n-1 + \sqrt{x - (n-1)} = n-1 + \sqrt{x - n + 1}$

$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n$ donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = f(n) = n$. Nous en déduisons que la fonction est continue en n

Exercice 2

Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $g: \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^{*+} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow \frac{f(x)}{x} \end{array} \right\}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^{*+}$?
2. Sans être la fonction nulle, la fonction f peut-elle s'annuler sur $\mathbb{R}^{*+}$?

Solution

1. f est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$. Donc d'après le théorème de la limite monotone $\forall x \in \mathbb{R}^{*+}$, f admet une limite à droite et à gauche en x . Ces limites vérifient $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$

De plus g est décroissante, donc pour les mêmes raisons $\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y)}{y}$

$\lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y)}{y} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y)}{y} \Rightarrow x \lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y)}{y} \geq f(x) \geq x \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y)}{y}$ (En effet $x \geq 0$)

$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow x^-} y \lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y)}{y} \geq f(x) \geq \lim_{y \rightarrow x^+} y \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y)}{y} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \geq f(x) \geq \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ (si $f \rightarrow l$ et $g \rightarrow l'$ alors $fg \rightarrow ll'$)

Or nous avons déjà $\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) \leq f(x) \leq \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$ cela n'est possible que si

$\lim_{y \rightarrow x^-} f(y) = f(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} f(y)$

La fonction f est donc continue en x

2. Supposons que la fonction f s'annule en $x \in \mathbb{R}^{*+}$. Nous avons $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$

f étant croissante $\forall y \in]-\infty; x[$ $f(y) \leq 0$ et $\forall y \in]x; +\infty[$ $f(y) \geq 0$

g étant décroissante $\forall y \in]-\infty; x[$ $g(y) \geq 0$ et $\forall y \in]x; +\infty[$ $g(y) \leq 0$

Si $y \leq x \Rightarrow f(y) \leq 0$ et $g(y) \geq 0 \Rightarrow f(y) \leq 0$ et $\frac{f(y)}{y} \geq 0 \Rightarrow f(y) \leq 0$ et $f(y) \geq 0$ (En effet $y \geq 0$).

Cela n'est possible que si $f(y) = 0$. Donc f est nulle sur $]-\infty; x[$

Si $y \geq x \Rightarrow f(y) \geq 0$ et $g(y) \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0$ et $\frac{f(y)}{y} \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0$ et $f(y) \leq 0$ (En effet $y \geq 0$).

Cela n'est possible que si $f(y) = 0$. Donc f est nulle sur $]x; +\infty[$. Donc f est nulle sur $]-\infty; x]$.

Conclusion f est nulle sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et 1-périodique.

Montrer que pour tout réel a non nul, il existe un réel c tel que $f(c+a) = f(c)$

Solution

Soit $a \in \mathbb{R}$. Posons φ la fonction définie par $\varphi(x) = f(a+x) - f(x)$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc atteint ses bornes sur un segment. Considérons le segment $[0; 1]$

Soit $M = \sup_{x \in [0;1]} f(x)$ et $m = \inf_{x \in [0;1]} f(x)$

Il existe x_1 et x_2 dans $[0; 1]$ tels que $M = f(x_1)$ et $m = f(x_2)$

Or f est 1-périodique.

Donc $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ et $m = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x)$

$\varphi(x_1) = f(a+x_1) - f(x_1) = f(a+x_1) - M$. Donc $\varphi(x_1) \leq 0$ car $f(a+x_1) \leq M$

$\varphi(x_2) = f(a+x_2) - f(x_2) = f(a+x_2) - m$. Donc $\varphi(x_2) \geq 0$ car $f(a+x_2) \geq m$

Dans le cas où $\varphi(x_1) = 0$ ou $\varphi(x_2) = 0$ alors nous avons résolu le problème.

Dans le cas où $\varphi(x_1) \neq 0$ et $\varphi(x_2) \neq 0$ alors nous avons $\varphi(x_1) < 0$ et $\varphi(x_2) > 0$

φ est continue sur $[x_1; x_2]$. $\varphi(x_1) < 0 < \varphi(x_2)$ Donc le TVI nous renseigne sur le fait qu'il existe x_3 dans $[x_1; x_2]$ tel que $\varphi(x_3) = 0$. $\varphi(x_3) = 0 \Leftrightarrow f(a+x_3) - f(x_3) = 0$ Nous avons donc résolu notre problème.

Exercice 4

Soit f une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de point fixe. Montrer que $f \circ f$ n'admet pas de point fixe.

Indication : f admet un point fixe dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$

Solution

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = f(x) - x$.

f n'admet pas de point fixe. Donc φ ne s'annule jamais. φ étant continue cela signifie que
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0 \\ \text{ou} \\ \forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

Supposons $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$

f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela signifie que $\forall x \in \mathbb{R}, f \circ f(x) > f(x)$

Supposons que $f \circ f$ admette un point fixe c nous aurions $f \circ f(c) > f(c) \Leftrightarrow c > f(c)$

Cela est impossible car nous avons montré que $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > x$

Bien entendu si nous avons supposé que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < x$ nous serions arrivés au même genre de contradiction

Exercice 5

Soit f une application continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$ telle que $f \circ f = f$

On note $E = \{x \in [0; 1] \text{ tels que } f(x) = x\}$

1. Montrer que $f([0; 1]) \subset E$
2. Montrer que E est un intervalle de $\mathbb{R}$, puis un segment
3. Déterminer E . Donner un exemple de fonction f vérifiant ces hypothèses.

Solution

1. $y \in f([0; 1]) \Rightarrow y = f(x)$ avec $x \in [0; 1] \Rightarrow f(y) = f \circ f(x) = f(x) = y \Rightarrow y \in E$ donc $f([0; 1]) \subset E$
2. Soient x et y dans E avec $x < y$. Soit z tel que $x < z < y$. $x < z < y \Leftrightarrow f(x) < z < f(y)$ car x et y sont dans E . Or si z est compris entre $f(x)$ et $f(y)$, alors le TVI nous informe (la fonction f étant continue) que : $\exists c \in [x; y]$ tel que $z = f(c)$. c étant compris entre x et y , nous avons $c \in [0; 1]$. Donc $z \in f([0; 1])$ et d'après la question précédente $z \in E$. Donc E est un intervalle.

Si $E = \emptyset$ alors le problème est fini.

Si E est non vide, c'est une partie de $\mathbb{R}$ majorée par 1 et minorée par 0. Donc il admet une borne sup M et une borne inf m . Nous avons donc $E \subset [m; M]$ (*)

Soit $M = \text{borne_sup}(E)$. $\exists (x_n)$ suite de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M$

f est continue donc $f(M) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ Or $x_n \in E$ donc $f(x_n) = x_n$

Il vient $f(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = M \Rightarrow M \in E$. On montre de même $m \in E$

Soit $z \in [m; M]$

Nous avons $m \leq z \leq M \Rightarrow f(m) \leq z \leq f(M)$. Donc f étant continue le TVI nous dit que $\exists c \in [m; M]$ tel que :

$$z = f(c)$$

Il vient $f(z) = f \circ f(c) = f(c) = z$ donc $z \in E$

Nous avons donc montré que $[m; M] \subset E$. En nous appuyant sur (*) il vient $[m; M] = E$. E est donc bien un segment.

3. Nous avons $f([0; 1]) \subset E$ et $E = [m; M]$ donc $f([0; 1]) \subset [m; M]$ (**)

Soit $z \in [m; M]$

Nous avons $m \leq z \leq M \Rightarrow f(m) \leq z \leq f(M)$. Donc f étant continue le TVI nous dit que $\exists c \in [m; M]$ tel que :

$$z = f(c)$$

$m \geq 0$ et $M \leq 1$ donc $c \in [0; 1]$. Il vient $z = f(c)$ avec $c \in [0; 1]$ donc $z \in f([0; 1]) \Rightarrow [m; M] \subset f([0; 1])$

Ce qui nous amène en nous appuyant sur (**) : $[m; M] = f([0; 1]) \Rightarrow E = f([0; 1])$

Donnons un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses.

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x & \text{pour } x \in [0; M] \text{ avec } M \leq 1 \\ f(x) = M & \text{pour } x \in [M; 1] \end{cases}$$

f vérifie les conditions données par l'énoncé.

Exercice 6

Soit f une fonction continue définie sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$.

1. Prouver que pour tout entier naturel n non nul il existe un réel α_n tel que $f(\alpha_n) = \alpha_n^n$
2. On rajoute l'hypothèse f strictement décroissante.
 - a. Montrer qu'il existe un unique réel α_n tel que $f(\alpha_n) = \alpha_n^n$
 - b. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante
 - c. Donner la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Solution

1. Posons φ_n la fonction définie par $\varphi_n(x) = f(x) - x^n$
 φ_n est continue.
 $\varphi_n(0) = f(0)$ Donc $\varphi_n(0) \geq 0$.
 $\varphi_n(1) = f(1) - 1$. Or $f(1) \leq 1$ Donc $\varphi_n(1) \leq 0$
D'après le TVI il existe un réel α_n dans $[0; 1]$ tel que $\varphi_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_n) - \alpha_n^n = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_n) = \alpha_n^n$
2. a. $\varphi_n(x) = f(x) + (-x^n)$ Donc φ_n est la somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $[0; 1]$
Nous en déduisons que φ_n est strictement décroissante sur $[0; 1]$
D'après le corollaire du TVI appliqué aux fonctions strictement monotones nous pouvons en déduire que :
 $\exists ! \alpha_n \in [0; 1]$ tel que $\varphi_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_n) - \alpha_n^n = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_n) = \alpha_n^n$
b. Nous avons $\varphi_n(\alpha_n) = 0 \Rightarrow f(\alpha_n) - \alpha_n^n = 0$ mais $\alpha_n^{n+1} \leq \alpha_n^n$ (car $\alpha_n \in [0; 1]$)
Donc $f(\alpha_n) - \alpha_n^{n+1} \geq 0 \Rightarrow \varphi_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$. Or φ_{n+1} est strictement décroissante (comme φ_n)
 $\varphi_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ Donc $\varphi_{n+1}(\alpha_n) > 0$. φ_{n+1} étant strictement décroissante nous avons $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$
La suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc bien croissante.
c. $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, à valeurs dans $[0; 1]$ et majorée par 1. Donc elle converge vers une limite l dans $[0; 1]$.
Supposons que $l < 1$
Alors $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $\alpha_n \leq l$
 $f(\alpha_n) = \alpha_n^n \Rightarrow f(\alpha_n) \leq l^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = 0 \Rightarrow f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n\right) = 0$ (car f est continue)
Cela implique $f(l) = 0$. Or f étant strictement décroissante cela implique que $\forall x \in]l, 1], f(x) < 0$ ce qui est impossible puisque f est à valeurs dans $[0; 1]$.
Dans ce cas l'hypothèse $l < 1$ est fautive et nous avons $l = 1$

Exercice 7

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Alors f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Solution

Soit $\beta = f(\alpha)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ donc $\exists \gamma > 0$ tel que $\forall |x| > \gamma, f(x) \geq \beta$
Quitte à élargir encore cet intervalle, on peut s'arranger pour que $\alpha \in [-\gamma; \gamma]$.

f est continue donc atteint ses bornes sur l'intervalle $[-\gamma; \gamma]$, en particulier son minimum m .
 $\forall x \notin [-\gamma; \gamma], f(x) \geq \beta \geq m$

Donc m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.