Nombres complexes. Cours.

Exponentielle complexe

Définitions	Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle exponentielle complexe de z et on note e^z le nombre $e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}$	
Exemple	$e^{1+\frac{i\pi}{2}} = e * e^{\frac{i\pi}{2}} = ie$	
Propriétés	$\lvert e^z \rvert = e^{\Re(z)}$; $Arg(e^z) = \Im(z)\ [2\pi]$	
Preuve	Evidente en partant de la définition	
Propriétés	• La fonction exponentielle est $2\pi i$ périodique.	• $\forall z, z'\ e^{z+z'} = e^z e^{z'}$
Preuve	$e^{z+2\pi i} = e^{\Re(z+2\pi i)}e^{i\Im(z+2\pi i)} = e^{\Re(z)}e^{i[\Im(z)+2\pi]}$ $= e^{\Re(z)}e^{i[\Im(z)]}e^{i2\pi} = e^{\Re(z)}e^{i[\Im(z)]} = e^z$	$e^{z+z'} = e^{\Re(z+z')}e^{i\Im(z+z')}$ $= e^{\Re(z)}e^{\Re(z')}e^{i\Im(z)}e^{i\Im(z')}$ $= e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)}e^{\Re(z')}e^{i\Im(z')}$ $= e^z e^{z'}$
Méthode	La résolution d'équation du type $e^z = \alpha$ où z et α sont des complexes et où z est l'inconnue se résume à une identification de parties imaginaires et réelles.	
Exemple	$e^z = 3 + i \Leftrightarrow e^z = \lvert 3+i \rvert e^{iArg(3+i)}$ $\lvert 3+i \rvert = \sqrt{3^2+1^2} =$; $Arg(3+i) = Arctan\left(\frac{1}{3}\right)[2\pi]$ Donc $e^z = 3+i \Leftrightarrow e^z = \sqrt{10}e^{iArctan\left(\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow e^{\Re(z)}e^{i\Im(z)} = \sqrt{10}e^{iArctan\left(\frac{1}{3}\right)}$ Il vient $e^{\Re(z)} = \sqrt{10} \Leftrightarrow \Re(z) = \ln\left(\sqrt{10}\right) = \frac{1}{2}\ln(10)$ $e^{i\Im(z)} = e^{iArctan\left(\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \Im(z) = Arctan\left(\frac{1}{3}\right)[2\pi]$ Il vient $z = \frac{1}{2}\ln(10) + Arctan\left(\frac{1}{3}\right)i + 2\pi i * K$; K étant un entier relatif	
Théorème	Soit $\theta : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable où I représente un intervalle de $\mathbb{R}$ La fonction $\varphi : \begin{cases} I \to \mathbb{R} \\ x \to e^{i\theta(x)} \end{cases}$ est dérivable et sa dérivée vaut $\varphi'(x) = i\theta'(x)e^{i\theta(x)}$	

Preuve

Posons $\theta(x) = \Re(x) + i\Im(x)$ où $\Re$ et $\Im$ représentent les parties réelles et imaginaires de x. θ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\Re$ et $\Im$ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

$$\varphi(x) = e^{i\theta(x)} = e^{i(\Re(x)+i\Im(x))} = e^{-\Im(x)+i\Re(x)} = e^{-\Im(x)}\left(\cos(\Re(x)) + i\sin(\Re(x))\right)$$

Il vient :

$\Re\left(\varphi(x)\right) = e^{-\Im(x)}(\cos\Re(x))$ et $\Im\left(\varphi(x)\right) = e^{-\Im(x)}(\sin\Re(x))$

Du coup

$\Re\left(\varphi'(x)\right) = -\Im'(x)e^{-\Im(x)}\cos\Re(x) - \Re'(x)e^{-\Im(x)}(\sin\Re(x))$

$\Im\left(\varphi'(x)\right) = -\Im'(x)e^{-\Im(x)}\sin\Re(x) + \Re'(x)e^{-\Im(x)}(\cos\Re(x))$

De même :

$$\begin{aligned} i\theta'(x)e^{i\theta(x)} &= i\left(\Re'(x) + i\,\Im'(x)\right)e^{i(\Re(x)+i\Im(x))} = \left(i\Re'(x) - \Im'(x)\right)e^{-\Im(x)+i\Re(x)} \\ &= e^{-\Im(x)}\left(i\Re'(x) - \Im'(x)\right)(\cos\Re(x) + i\sin\Re(x)) \\ &= e^{-\Im(x)}\left(-\Re'(x)\sin\Re(x) - \Im'(x)\cos\Re(x)\right) + ie^{-\Im(x)}(-\Im'(x)\sin\Re(x) + \Re'(x)\cos\Re(x)) \\ &= \Re\left(\varphi'(x)\right) + i\,\Im\left(\varphi'(x)\right) \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $\varphi'(x) = i\theta'(x)e^{i\theta(x)}$