Nombres complexes. Cours.

Extraction de la racine carrée d'un nombre complexe	
Propriété	Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées qui sont opposées.
Preuve	
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Ecrivons le sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$. D'après le chapitre sur les racines nièmes d'un nombre complexe nous savons que les racines carrées de z sont $\sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}+k\pi}$ avec $k \in \{0; 1\}$ soit $\pm\sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta}{2}}$	
Méthode	Comment trouver les deux racines carrées d'un nombre complexe non nul lorsque celui-ci est écrit sous forme algébrique ? Ecrivons le sous la forme $z = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ Nous cherchons x et y réels tels que $\omega = x + iy$ vérifie $\omega^2 = z$ $(x + iy)^2 = \alpha + i\beta \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = \alpha + i\beta$ Identifions les parties réelles et imaginaires x et y sont donc solutions de $\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \ (1) \\ 2xy = \beta \ (2) \end{cases}$ Nous savons aussi que $\lvert\omega\rvert^2 = \lvert z\rvert$ cela implique $x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,(3)$ Grâce aux équations (1) et (3) il est possible de déterminer x^2 et y^2 L'équation (2) nous renseigne sur le signe de xy et nous donne ainsi x et y
Exemple	Cherchons les racines carrées de $z = 3 + 4i$. Posons $\omega = x + iy$ une de ces racines. x et y vérifient $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \ (1) \\ 2xy = 4 \ (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \ (3) \end{cases}$ En se concentrant sur (1) et (3) il vient $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$ L'équation (2) nous donne $xy = 2$ Il nous reste donc comme solution $\begin{cases} x = 2; y = 1 \\ x = -2; y = -1 \end{cases}$ Les racines carrés de $z = 3 + 4i$ sont donc dans l'ensemble $\{\omega; \omega'\}$ avec $\omega = 2 + i$ et $\omega' = -2 - i$ Elles sont au nombre de deux donc ces 2 racines sont donc exactement ω et ω'