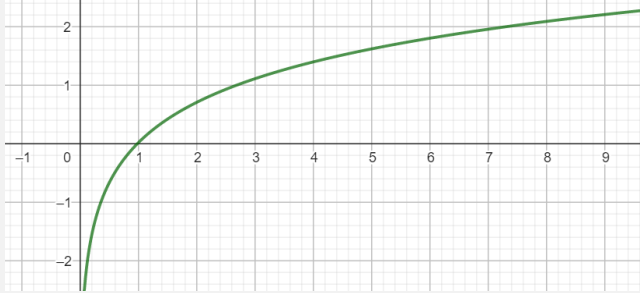


Fonction ln	
Définition	La fonction exp est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{**}$. D'après le TVI elle établit donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{**}$. Nous appellerons sa réciproque la fonction logarithme népérien que nous noterons $\ln$
Propriété	De sa définition découlent les propriétés $\forall x \in \mathbb{R}^{**} \exp(\ln(x)) = x$; $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(\exp x) = x$
Propriété	La fonction $\ln$ est la réciproque d'une fonction continue, dérivable et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons la dérivabilité de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}^{**}$. $\forall x \in \mathbb{R}^{**} \ln'(x) = \frac{1}{x}$. $\forall x \in \mathbb{R}^{**}, \frac{1}{x} > 0$ donc la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}^{**}$.
Exemple	Courbe représentative 
Propriété	$\ln(1) = 0$ en effet $\ln(1) = \ln(\exp(0)) = 0$
Propriété	$\forall x > 0 \ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. $\ln''(x) < 0$, la fonction est donc concave sur $\mathbb{R}^{**}$
Propriété	$\forall x, y \in \mathbb{R}^{**} \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. D'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
Preuve	
$\exp(\ln(x) + \ln(y)) = \exp(\ln(x)) * \exp(\ln(y)) = xy$ $\ln(xy) = \ln(\exp(\ln(x) + \ln(y))) = \ln(x) + \ln(y)$	
Propriété	Soient p et q deux entiers naturels non nuls. $\forall x \in \mathbb{R}^{**} \ln\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q} \ln(x)$
Preuve	
En deux temps. $\ln(x^p) = p \ln(x)$ se démontre à l'aide d'une récurrence évidente. Nous savons en effet que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ cela implique $\ln(x^2) = 2 \ln(x)$. Le reste de la récurrence est immédiat. Puis, $\ln\left(x^{\frac{q}{q}}\right) =$ $q \ln\left(x^{\frac{1}{q}}\right) \text{ donc } \ln\left(x^{\frac{1}{q}}\right) = \frac{\ln x}{q}$	
Définition	La fonction logarithme prend la valeur 1 en un seul réel $\exp(1) = e$. Ce nombre e est appelé constante de neper et vaut approximativement $e \approx 2,71$
Propriété	Croissance comparée en 0 et en $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ de même $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$
Preuve	
Nous savons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(X)}{X} = +\infty$. Posons $X = \ln t$. Il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(X)}{X} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\ln(t))}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t)}$ Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{\ln(t)} = +\infty$. Ce qui implique $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. $\lim_{t \rightarrow 0} t \ln t = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$	
Propriété	$\ln(x) \approx x - 1$ au voisinage de 1 et $\ln(1 + x) \approx x$ au voisinage de 0.
Preuve	
La définition de la dérivabilité en 1, donne $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$ Donc $\ln(x) \approx x - 1$ au voisinage de 1. En posant $x = 1 + h$ il vient $\ln(1 + h) \approx 1 + h - 1 \approx h$ au voisinage de 0.	
Propriété	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
Preuve	
$\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \exp(t)$ en posant $X = \exp(t)$. Il vient $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \exp(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = -\infty$	