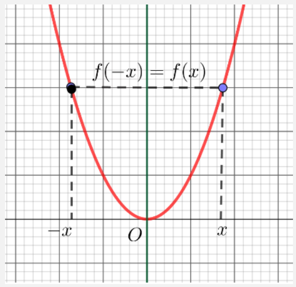
Parité de fonctions

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $\forall x \in E, -x \in E$. On dit que E est symétrique par rapport à 0.

Définition : f est une fonction paire lorsque $\forall x \in E$, $f(-x) = f(x)$

Propriété : La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Preuve

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe de la fonction f. Son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées est le point $M'\big(-x, f(x)\big)$. Or $f(x) = f(-x)$ donc les coordonnées de M' sont $M'\big(-x, f(-x)\big)$ ce qui signfie que M' est aussi sur la courbe de la fonction f

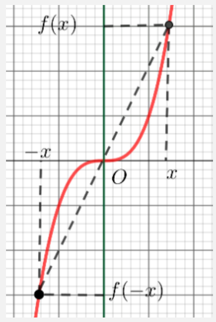
Réciproquement, tout point de la courbe de la fonction f de la forme $M(x, f(x))$ est le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de $M'(-x, f(x))$ ou $M'(-x, f(-x))$ ce qui signifie que M' est aussi sur la courbe.

Méthode : Pour étudier une fonction paire, il suffit de l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}^+$. Le reste de la courbe se déduit par une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple : La fonction $f: \left\{ \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ x \to x^2 - 6x^4 \end{array} \right\}$ est une fonction paire. En effet $f(-x) = (-x)^2 - 6(-x)^4 = x^2 - 6x^4 = f(x)$

Définition : f est une fonction paire lorsque $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$

Propriété : La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Preuve

Soit $M(x, f(x))$ un point de la courbe de la fonction f. Son symétrique par rapport à l'origine est le point $M'(-x, -f(x))$. f est une fonction impaire donc $-f(x) = f(-x)$. Le point M' peut donc s'écrire $M'(-x, f(-x))$ ce qui signifie que lui aussi est sur la courbe.

Réciproquemement un point M de la courbe de la forme $M(x, f(x))$ est le symétrique du point $M'\big(-x, -f(x)\big) = M'\big(-x, f(-x)\big)$ donc est le symétrique d'un point de la courbe.

Méthode : Pour étudier une fonction impaire, il suffit de l'étudier sur $E \cap \mathbb{R}^+$. Le reste de la courbe se déduit par une symétrie centrale par rapport à l'origine.

Exemple : La fonction $f: \left\{ \begin{array}{c} E \to \mathbb{R} \\ x \to x^3 - 6x \end{array} \right\}$ est une fonction impaire. En effet $f(-x) = (-x)^3 - 6(-x) = -x^3 + 6x = -(x^3 - 6x) = -f(x)$

Remarque : La courbe d'une fonction impaire passe toujours par l'origine. En effet $f(0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$

Propriété : Soit $f: E \to F$ une fonction bijective et impaire. (On suppose que E est symétrique par rapport à l'origine). Alors F est symétrique par rapport à 0 et f^{-1} est impaire.

Preuve

Soit $y \in F$. f est surjective. Donc $\exists x, y = f(x)$. $-y = -f(x) = f(-x)$ donc $-y \in F$ ce qui signifie que F est symétrique par rapport à l'origine.

Soit $y \in F$. $\exists x, y = f(x)$ $\big(x = f^{-1}(y)\big)$

donc $-y = -f(x) = f(-x)$ ce qui implique que $-x = f^{-1}(-y)$. On a donc bien $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(y)$

ce qui implique que f^{-1} est impaire.