Fonctions périodiques.

Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction et T un réel strictement positif. On suppose que $\forall x \in E, x + T \in E$.

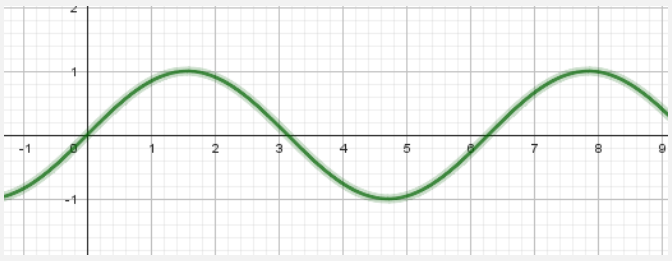
Définition

f est une fonction $T-$ périodique lorsque $\forall x \in E,\ f(x+T) = f(x)$

Exemple

La fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to \sin x \end{cases}$ est $2\pi -$ périodique.
Cela signifie que $\forall x \in \mathbb{R}\ \sin(x + 2\pi) = \sin x$

Visuellement cela signifie que la courbe se répète tous les 2π



Propriété

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$ périodique

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(x + kT) = f(x)$$

Preuve

Une simple récurrence sur k peut nous en convaincre.

Remarque

La propriété précédente nous renseigne sur le fait qu'une fonction possède toujours une infinité de périodes. (Si elle est $T-$ périodique elle est aussi $2T-$ périodique …..). Il vaut donc mieux parler d'**une** période de la fonction f plutôt que de **la** période.

Théorème

Soient f et g deux fonctions $T-$ périodiques sur un ensemble E.
Les fonctions $h: x \to f(x)g(x)$, $i: x \to f(x) + g(x)$ et $j: x \to \frac{f(x)}{g(x)}$ (lorsque g ne s'annule pas) sont aussi
$T-$ périodiques.

Preuve

$$h(x+T) = f(x+T)g(x+T) = f(x)g(x) = h(x)$$
$$i(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = i(x)$$
$$j(x+T) = \frac{f(x+T)}{g(x+T)} = \frac{f(x)}{g(x)} = j(x)$$

Exemple

La fonction $x \to \sin x * \cos x$ est 2π périodique.

Théorème

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction $T-$ périodique
Soit ω un réel et h : la fonction $x \to f(\omega x)$.
Cette fonction est définie sur l'ensemble E' défini par $\forall x \in E', \exists y \in E$ tel que $x = \frac{y}{\omega}$
Alors la fonction h est $\frac{T}{\omega}-$ périodique.

Preuve

$$\forall x \in E'\ h\left(x + \frac{T}{\omega}\right) = f\left(\omega\left(x + \frac{T}{\omega}\right)\right) = f(\omega x + T) = f(\omega x) = h(x)$$

Exemple

La fonction $x \to \sin 2x$ est $\frac{2\pi}{2}-$ périodique soit $\pi-$ périodique

Remarque

Il ne sert à rien d'étudier une fonction $T-$ périodique sur $\mathbb{R}$. Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur T. Le reste de l'étude se déduit par translation.