Groupe

Définition

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne o. On dit que (E, o) est un groupe lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

- o est associative
- E admet un élément neutre e
- Tout élément x de E admet un symétrique dans E

Remarque

- Lorsque la loi de composition interne est un $*$ on parle de groupe multiplicatif
  Soit $x \in E, x * x * \dots x \ (n\ fois)$ se note x^n
- Lorsque la loi de composition interne est un $+$ on parle de groupe additif
  Soit $x \in E, x + x + \cdots x \ (n\ fois)$ se note nx
- Lorsque la loi de composition interne est commutative, on parle de groupe abélien.

Exemples

- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ sont des groupes additifs.
- $(\mathbb{Q}^*, *), (\mathbb{R}^*, *)$ et $(\mathbb{C}^*, *)$ sont des groupes multiplicatifs.
- L'ensemble des nombres complexes de module 1 noté $\mathbb{U}$ est un groupe multiplicatif.
- L'ensemble des racines $n - ièmes$ de l'unité noté $\mathbb{U}_n$ est un groupe multiplicatif.

Propriété

Dans un groupe le symétrique d'un élement x quelconque est unique.

Preuve

Soient y et z deux symétriques d'un élement x quelconque dans un groupe (G, o).
Nous avons $x\ o\ y = y\ o\ x = x\ o\ z = z\ o\ x = e_G.\ x\ o\ z = e_G \Longrightarrow y\ o\ x\ o\ z = y\ o\ e_G \Longrightarrow z = y$

Définition

Soit E un ensemble on appelle permutation de E toute bijection de E dans E

Exemple

Si $E = \{1,2,3 \dots n\}$. Soit f la bijection telle que $f(1) = 2, f(2) = 3, \dots f(n-1) = n, f(n) = 1$. Cette bijection est une permutation de E

Propriété

L'ensemble des permutations de E que l'on note S_E est un groupe asssocié à la loi o (loi de composition) que l'on appelle groupe symétrique.

Preuve

- La loi o est associative dans E : $\forall (f, g, h) \in E^3, fo(goh) = (fog)oh$
- Id_E est l'élément neutre pour la loi o dans E
- $\forall \sigma \in S_E$, σ est une bijection. Elle admet donc une réciproque σ^{-1}.
  Cette réciproque est le symétrique de σ dans E

Propriété

Soient $(G_1, o_1), (G_2, o_n), \dots (G_n, o_n)$. On définit l'ensemble produit $G = G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots . G_n$
Sur cet ensemble on définit une loi de composition interne o telle que :
$\forall (x, y) \in (G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots . G_n)^2$ si $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots y_n)$ alors

$$x\ o\ y = (x_1 o_1 y_1, x_2 o_2 y_2, \dots x_n o_n y_n)$$

Alors G muni de cette loi est un groupe noté (G, o) que l'on appelle groupe multiplicatif

Preuve

- La loi o est associative : $\forall (x, y, z) \in (G_1 \times G_2 \times G_3 \times \dots . G_n)^3$
  $(x\ o\ y)\ o\ z = (x_1 o_1 y_1, x_2 o_2 y_2, \dots x_n o_n y_n)\ o\ z = (x_1 o_1 y_1 o_1 z_1, x_2 o_2 y_2 o_2 z_2, \dots x_n o_n y_n o_n z_n)$
  $x\ o\ (y\ o\ z) = x\ o\ (y_1 o_1 z_1, y_2 o_2 z_2, \dots y_n o_n z_n) = (x_1 o_1 y_1 o_1 z_1, x_2 o_2 y_2 o_2 z_2, \dots x_n o_n y_n o_n z_n)$
- Cette loi admet $(e_1, e_2, \dots e_n)$ comme élément neutre.
- $\forall x \in G, x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ alors $({x_1}^{-1}, {x_2}^{-1}, \dots {x_n}^{-1})$ est le symétrique de x, noté x^{-1} , dans G.

Exemple

On peut définir par exemple à l'aide de $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}^*, *)$ le groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^*$
Soit $x = (2; \frac{2}{3})$ et $y = \left(-1; \frac{1}{7}\right)$ appartiennent à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}^*$

$$x\ o\ y = \left(2 - 1; \frac{2}{3} * \frac{1}{7}\right) = (1; \frac{2}{21})$$