Intégration. Cours

Intégration changement de variable

Théorème

Soit φ une fonction dérivable de I dans J, dont la dérivée φ' est continue sur I
Soit f une fonction continue de J dans $\mathbb{C}$.
Soient a et b deux réels de I Alors

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$$

Preuve

f étant continue sur J, admet une primitive F.
φ étant dérivable sur I, la fonction $Fo\,\varphi$ est dérivable sur I et $(F\ o\ \varphi)' = F'o\ \varphi * \varphi' = f\ o\ \varphi * \varphi'$
La fonction φ' étant continue sur I, la fonction $f\ o\ \varphi * \varphi'$ est continue sur I donc intégrable sur $[a,b]$

Il vient $\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)dx = [F\ o\ \varphi]_a^b = F\ o\ \varphi(b) - F\ o\ \varphi(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx$

Exemples

- Calcul de $I = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

Posons $\varphi(x) = 1-x$, $\varphi'(x) = -1$. φ continue et dérivable sur $[0\,;1]$, φ' continue sur $[0\,;1]$

$$I = \int_0^1 -(1-\varphi(x))^2\sqrt{\varphi(x)}\,\varphi'(x)dx = -\int_0^1 \big(1-\varphi(x)\big)^2\sqrt{\varphi(x)}\,\varphi'(x)dx = -\int_1^0 (1-x)^2\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 (1-x)^2\sqrt{x}\,dx$$

$$I = \int_0^1 (1+x^2-2x)\sqrt{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx + \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}\,dx - 2\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{7}\left[x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 - 2\frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{2}{7}-\frac{4}{5} = \frac{14}{21}+\frac{6}{21}-\frac{4}{5}$$

$$= \frac{20}{21}-\frac{4}{5} = \frac{100}{105}-\frac{84}{105} = \frac{16}{105}$$

- Calcul de $J = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

Posons $\varphi(x) = \cos x$, $\varphi'(x) = -\sin x$. φ continue et dérivable sur $\left[\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, φ' continue sur $\left[\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$$J = \int_{\cos\frac{\pi}{3}}^{\cos\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-(\cos x)^2}\,(-\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 1-\cos^2 x\,dx$$

Or $\cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 \Longrightarrow cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \Longrightarrow 1 - cos^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) - \left[\frac{\sin(2x)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = \frac{\pi+6}{24}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

- Calcul de $K = \int_a^b \frac{1}{x^2+k^2}dx$

$$K = \int_a^b \frac{1}{x^2+k^2}dx = \int_a^b \frac{1}{k^2}\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)^2+1}dx = \frac{1}{k^2}\int_a^b \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)^2+1}dx$$

On pose $\varphi(x) = \frac{x}{k}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{k}$

$$K = \frac{1}{k^2}\int_a^b \frac{k}{\varphi^2(x)+1}\varphi'(x)dx = \frac{1}{k}\int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{1}{k}[Arctan\,x]_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} = \frac{1}{k}\left(Arctan\frac{b}{k} - Arctan\frac{a}{k}\right)$$