Intégration. Cours

<table>
<tr><th colspan="2">Intégration par parties</th></tr>
<tr><td>Théorème</td><td>Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose leurs fonctions dérivées f' et g' continues sur I. Alors pour tous réels a et b de I
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">Preuve</th></tr>
<tr><td colspan="2">Nous savons que pour tout x de I, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$$\int_a^b (fg)'(x)dx = \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)dx \to [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx \to$$
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td>Nous allons calculer $\int_0^1 xe^x dx$. A priori nous ne connaissons pas de primitive à la fonction $x \to xe^x$
Nous allons donc calculer cette intégrale grâce à l'intégration par parties.
Posons $f'(x) = e^x$ et $g(x) = x$ Nous avons sur $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ et $g'(x) = 1$
Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées sont continues.
$$\int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 g(x)f'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [e^x x]_0^1 - \int_0^1 1 * e^x dx$$
$$= e * 1 - 1 * 0 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$
Donc $\int_0^1 xe^x dx = 1$</td></tr>
</table>