Nombres complexes. Cours.

Interprétation géométrique.	
Propriété	Soient A, B et C trois points distincts d'affixe, a, b et c. Le point C appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si $\left\lvert\frac{c-a}{c-b}\right\rvert = 1$
Preuve	$\left\lvert\frac{c-a}{c-b}\right\rvert = 1 \Leftrightarrow \left\lvert\frac{AC}{BC}\right\rvert = 1$
Propriété	Soient A et B deux points du plan d'affixe a et b. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z distinct de A et de B. $$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$$

Preuve

Remarquons d'abord que si l'on pose O l'origine du repère, I le point de coordonnées $(1,0)$ et M un point d'affixe z alors $\arg(z) = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \arg(z-b) - \arg(z-a)\,[2\pi]$$

$z-b$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BM}$. Soit J le point d'affixe $z-b$.

$$\arg(z-b) = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM}}\right)[2\pi]$$

$z-a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AM}$. Soit K le point d'affixe $z-a$.

$$\arg(z-a) = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OK}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM}}\right) - \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OI}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right)[2\pi] = \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$$

Propriété (et application)	Soient trois points A, B et C distincts d'affixe, a, b et c. Ces trois points sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = 0[\pi]$
Preuve	$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$. Trois points A, B et C sont alignés ssi $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = 0[\pi]$
Propriété (et application)	Soient A, B et C trois points distincts d'affixe, a, b et c. (AC) est perpendiculaire à (BC) si et seulement si $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
Preuve	$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)[2\pi]$. (AC) est perpendiculaire à (BC) si et seulement si $\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$