

Limite approche séquentielle

Théorème

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a adhérent à D_f , $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow$ Pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points à valeurs dans D_f convergeant vers a la suite $(f(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

Preuve

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ alors $\forall V_l \exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_f, f(x) \in V_l$ (i)
Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points à valeurs dans D_f convergeant vers a .
 $\exists N$ tq $\forall n \geq N, U_n \in V_a$. On en déduit d'après (i) que $\forall n \geq N, f(U_n) \in V_l$.
La suite $f(U_n)$ converge donc bien vers l . La première implication est démontrée.
- Supposons que pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points à valeurs dans D_f convergeant vers a la suite $(f(U_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq l$
La négation de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ est : $\exists V_l \forall V_a \exists x \in V_a \cap D_f, f(x) \notin V_l$
Dans le cas où $a \in \mathbb{R}$, choisissons $V_{a,n} =]a - \frac{1}{n}; a + \frac{1}{n}[$
Nous avons donc l'existence d'un x_n appartenant à $V_{a,n} \cap D_f$ tel que $f(x_n) \notin V_l$
Considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Cette suite de part sa construction converge vers a , par contre la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l . Nous sommes donc arrivés à une contradiction.

Exemple

La fonction $x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.

En effet Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $x_n = \frac{1}{n}$. Cette suite converge évidemment vers 0.

Or $f(x_n) = \cos\left(\frac{\pi}{\frac{1}{n}}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Donc la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Nous en concluons donc que la fonction $x \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ ne peut pas avoir de limite en 0