

Existence de limite par majoration / minoration / encadrement**Théorème
(gendarmes)**

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un ensemble de définition D et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit a adhérent à D et $l \in \mathbb{R}$
On suppose :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$
- $\exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

Preuve

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ Donc, $\forall \varepsilon > 0$, il existe V_a^1 et V_a^2 tels que $\forall x \in V_a^1 \cap D, f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ et $\forall x \in V_a^2 \cap D, h(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Mais $V_a^1 \cap V_a^2 = V$ est un voisinage de a donc $\forall x \in V \cap D, f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ et $h(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Or $V_a \cap V$ étant un voisinage de a que nous appellerons W , nous avons :

$$\forall x \in W \cap D, f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ avec } f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[\text{ et } h(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$$

Cela implique donc que $g(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Nous avons donc montré que $\forall \varepsilon > 0$ il existe un voisinage de a : W tel que $\forall x \in W \cap D, g(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$

Cela traduit :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

Exemple

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x(-1)^{E(\frac{1}{x})}$ où E désigne la fonction partie entière.
Nous avons :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, -x \leq f(x) \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble de définition D et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit a adhérent à D

On suppose que :

- Dans un voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

Preuve

$$\exists V_a \text{ tel que } \forall x \in V_a \cap D, f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ Donc } \forall M \geq 0 \exists V_a' \text{ tel que } \forall x \in V_a' \cap D, f(x) \geq M$$

Posons $W = V_a \cap V_a'$, W est aussi un voisinage de a

$$\text{Donc } \forall M \geq 0 \exists W \text{ voisinage de } a \text{ tel que } \forall x \in W \cap D, g(x) \geq f(x) \geq M$$

Cela traduit :

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$$

Exemple

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^3 e^{1+\frac{1}{x^2}}$

Nous avons $\forall x \in \mathbb{R}^*, 1 + \frac{1}{x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{1+\frac{1}{x^2}} \geq e \geq 1$. (la fonction $\exp$ étant croissante)

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) \geq x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies sur un ensemble de définition D et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit a adhérent à D

On suppose que :

- Dans un voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Preuve

C'est la preuve symétrique du théorème précédent.

Théorème de la limite monotone pour les fonctions

Théorème

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ avec $a < b$

Soit $f:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ monotone.

- Si f est croissante :
 - Si f est majorée sur $]a; b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in]a; b[} f(x)$ sinon $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$
 - Si f est minorée sur $]a; b[$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in]a; b[} f(x)$ sinon $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- Si f est décroissante :
 - Si f est minorée sur $]a; b[$ alors $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \inf_{x \in]a; b[} f(x)$ sinon $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$
 - Si f est majorée sur $]a; b[$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \sup_{x \in]a; b[} f(x)$ sinon $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

Preuve

- Dans le cas où f est croissante et majorée sur $]a; b[$, $f(]a; b[)$ est une sous partie de $\mathbb{R}$ majorée. Nous en déduisons donc que $f(]a; b[)$ admet une borne sup : $\sup_{x \in]a; b[} f(x)$ que nous nommerons l .

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. $l - \varepsilon$ ne majore pas $f(]a; b[)$. Donc $\exists y \in]a; b[$ tel que $l - \varepsilon \leq f(y) \leq l + \varepsilon$
 $\forall x \geq y$ on a donc

$$l - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) \leq l \text{ car } f \text{ est croissante}$$

Nous avons montré que $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in]a; b[\forall x \in]y; b[\quad l - \varepsilon \leq f(x) \leq l$

Cela traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup_{x \in]a; b[} f(x)$

- Dans le cas où f est croissante et non majorée sur $]a; b[$.

Soit $A > 0$ quelconque. A ne majore pas f sur $]a; b[$. Donc $\exists y \in]a; b[$ tel que $f(y) \geq A$

Or f étant croissante sur $]a; b[$ nous avons donc pour tout x supérieur à y

$$f(x) \geq f(y) \geq A$$

Nous avons donc montré que $\forall A \geq 0 \exists y \in]a; b[\forall x \in]y; b[\quad f(x) \geq A$

Cela traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$

- Dans le cas où f est croissante et minorée sur $]a; b[$, $f(]a; b[)$ est une sous partie de $\mathbb{R}$ minorée. Nous en déduisons donc que $f(]a; b[)$ admet une borne inf : $\inf_{x \in]a; b[} f(x)$ que nous nommerons l .

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. $l + \varepsilon$ ne minore pas $f(]a; b[)$. Donc $\exists y \in]a; b[$ tel que $l \leq f(y) \leq l + \varepsilon$
 $\forall x \leq y$ on a donc

$$l \leq f(x) \leq f(y) \leq l + \varepsilon \text{ car } f \text{ est croissante}$$

Nous avons montré que $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in]a; b[\forall x \in]a; y[\quad l - \varepsilon \leq f(x) \leq l$

Cela traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf_{x \in]a; b[} f(x)$

- Dans le cas où f est croissante et non minorée sur $]a; b[$.

Soit $A < 0$ quelconque. A ne minore pas f sur $]a; b[$. Donc $\exists y \in]a; b[$ tel que $f(y) \leq A$

Or f étant croissante sur $]a; b[$ nous avons donc pour tout x inférieur à y

$$f(x) \leq f(y) \leq A$$

Nous avons donc montré que $\forall A \leq 0 \exists y \in]a; b[\forall x \in]a; y[\quad f(x) \leq A$

Cela traduit le fait que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

- Dans le cas où f est décroissante il faut appliquer les résultats précédents à la fonction $-f$ qui est, elle, croissante.

Théorème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Soit $a \in I$ (I désigne l'intérieur de a , cela signifie que a n'est pas une extrémité de I) alors f admet une limite en gauche et à droite en a .

De plus $\begin{cases} \text{si } f \text{ est croissante alors } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \text{si } f \text{ est décroissante alors } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \geq f(a) \geq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{cases}$

Preuve

Supposons f croissante. Soit $k > 0$ tel que $a - k$ et $a + k$ soient dans I . f est majorée sur $]a - k; a[$ par $f(a)$ et minorée sur $]a; a + k[$ par $f(a)$

Le théorème précédent nous dit que :

- $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe et vaut $\sup_{x \in]a-k; a[} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe et vaut $\inf_{x \in]a; a+k[} f(x)$

Par définition $\sup_{x \in]a-k; a[} f(x) \leq f(a) \leq \inf_{x \in]a; a+k[} f(x)$

La démonstration est symétrique dans le cas où f est décroissante