Limite à droite et à gauche pour une fonction

Définitions

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ et D_f son ensemble de définition.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et a adhérant à D_f

- On dit que f admet une limite finie à gauche en a et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$ lorsque
$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a-\alpha; a[\cap D_f \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à gauche en a et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ lorsque
$$\forall A \geq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a-\alpha; a[\cap D_f \Longrightarrow f(x) \geq A$$
- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à gauche en a et on note $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ lorsque
$$\forall A \leq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a-\alpha; a[\cap D_f \Longrightarrow f(x) \leq A$$
- On dit que f admet une limite finie à droite en a et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$ lorsque
$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a; a+\alpha[\cap D_f \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$
- On dit que f admet $+\infty$ comme limite à droite en a et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ lorsque
$$\forall A \geq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a; a+\alpha[\cap D_f \Longrightarrow f(x) \geq A$$
- On dit que f admet $-\infty$ comme limite à droite en a et on note $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ lorsque
$$\forall A \leq 0, \exists \alpha \geq 0, \quad x \in]a; a+\alpha[\cap D_f \Longrightarrow f(x) \leq A$$

Remarque

Il existe une manière plus synthétique mais moins maniable de qualifier la limite à droite ou à gauche d'une fonction avec $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et a adhérant à $]-\infty; a[$ (si l'on parle de limite à gauche) ou à $]a; +\infty[$ (si l'on parle de limite à droite):

- $\lim_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_{|D_f \cap]-\infty; a[} = l$
- $\lim_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f_{|D_f \cap]a; +\infty[} = l$

Exemples

- $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$;
Soit E la fonction partie entière. $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$; $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$;
- Soit f la fonction valeur absolue. La fonction $g: x \to \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x}$ admet une limite en 0^+ qui vaut 1 et une limite en 0^- qui vaut -1. Cela signifie que la fonction f admet en 0 un nombre dérivé à droite qui vaut 1 et à gauche un nombre dérivé qui vaut -1. La fonction f n'est donc pas dérivable en 0

Remarque

Une question se pose très vite : avoir une limite à gauche et à droite, est-ce suffisant pour avoir une limite ? le théorème qui suit répond à cette question.

Théorème

Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \mathbb{R}$ et a adhérant à D_f.

- Si f est définie en a alors : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ (i)
- Si f n'est pas définie en a alors $\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l$ (ii)

Preuve

- Démonstration de (i)
Si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ alors nous avons $\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha; a+\alpha[\cap D_f$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
Cela implique $\forall x \in]a-\alpha; a[\cap D_f$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ et $\forall x \in]a; a+\alpha[\cap D_f$, $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ donc $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$. Une première implication est démontrée
$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \Longrightarrow \exists \alpha > 0, \forall x \in]a; a+\alpha[\cap D_f, \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \Longrightarrow \exists \beta > 0, \forall x \in]a-\beta; a[\cap D_f, \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$
Prenons $\gamma = \min(\alpha, \beta)$
$$\forall x \in]a-\gamma; a+\gamma[\cap D_f, \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$
Donc $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Nous avons démontré l'implication réciproque
- Démonstration de (ii)
C'est exactement la même démonstration avec l à la place de $f(a)$

Exemple

- $\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^-} |x| = |0| = 0$ donc $\lim_{x\to 0} |x| = 0$
- $\lim_{x\to 1^+} E(x) = 1$; $\lim_{x\to 1^-} E(x) = 0$; et $E(1) = 1$ il est donc impossible de dire que $\lim_{x\to 1} E(x) = 1$