Limites et inégalités

Théorème

Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a adhérent à D_f, $l \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$
Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $l < K$ alors $f(x) < K$ dans un voisinage de a
De même si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $l > K$ alors $f(x) > K$ dans un voisinage de a

Preuve

Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $l < K$ alors posons $r = \frac{K-l}{2}$. Soit V_l tel que $V_l \subset]l-r; l+r[$).
$\exists V_a$ tel que $\forall x \in V_a \cap D_f$, $f(x) \in V_l$. Mais $f(x) \in V_l \Longrightarrow f(x) < K$
Donc nous avons bien trouvé un voisinage de a, V_a tel que $\forall x \in V_a \cap D_f, f(x) < K$

Dans le cas où $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $l > K$ alors $f(x) > K$ dans un voisinage de a nous avons une démonstration complétement symétrique.

Exemple

Soit $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})$; $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$; Donc $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in]-r; 0[\cup]0; r[, f(x) < \frac{1}{5}$

Théorème

Soient $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a adhérent à D_f et $g: D_g \to \mathbb{R}$ avec $D_f = D_g$
On suppose que :

- Il existe un voisinage de a : V_a tel que $\forall x \in V_a \cap D_f$ $f(x) \leq g(x)$
- $\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim_{x\to a} g(x) = l'$ avec l et l' réels

Alors $l \leq l'$

Preuve

Supposons le contraire : $l > l'$. Posons $r = \frac{l-l'}{3}$;
Choisissons V_l tel que $V_l \subset]l-r; l+r[$ et $V_{l'}$ tel que $V_l \subset]l'-r; l'+r[$
Alors $\exists V_a^1$ tel que $\forall x \in V_a^1 \cap D_f$, $f(x) \in V_l$. De même $\exists V_a^2$ tel que $\forall x \in V_a^2 \cap D_g$, $g(x) \in V_{l'}$.
$V_a^1 \cap V_a^2$ est un voisinage de a. Appelons le V. De plus $D_f = D_g = D$
Donc $\forall x \in V \cap D$, $f(x) \in V_l$ et $g(x) \in V_{l'}$ mais dans ce cas cela signifie que $\forall x \in V$, $f(x) > g(x)$
Or nous avons par hypothèse : Il existe un voisinage de a : V_a tel que $\forall x \in V_a \cap D_f$ $f(x) \leq g(x)$
$V \cap V_a$ étant un voisinage de a, appelons le W.
Nous aurions $\forall x \in W \cap D_f$ à la fois $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) > g(x)$. Nous sommes donc arrivés à une contradiction.