

Technique linéarisation

**Procédé :
Linéarisation**

Il est possible de transformer toute puissance de cosinus ou de sinus en une combinaison linéaire de cosinus et de sinus à la puissance 1.

Exemple

Supposons que nous ayons à calculer une intégrale du type $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

Bien entendu nous ne connaissons pas de primitive de la fonction $x \rightarrow \cos^4 x$ donc difficile d'effectuer cette intégrale. Par contre si nous étions capables de transformer $\cos^4 x$ en une combinaison linéaire de cosinus et de sinus à la puissance 1 alors le tour serait joué.

Remarquons que $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$. (Utilisation de la formule de Moivre)

Appliquons le binôme de Newton à $(e^{ix} + e^{-ix})^4$. Il vient :

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4} \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} e^{pix} e^{-(4-p)ix} = \frac{1}{2^4} \sum_{p=0}^4 \binom{4}{p} e^{(2p-4)ix} = \frac{1}{2^4} \left[\binom{4}{0} e^{-4ix} + \binom{4}{1} e^{-2ix} + \binom{4}{2} e^{0ix} + \binom{4}{3} e^{2ix} + \binom{4}{4} e^{4ix} \right]$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{2^4} [e^{-4ix} + e^{4ix} + 4e^{-2ix} + 4e^{2ix} + 6e^{0ix}] = \frac{1}{2^4} [2 \cos(4x) + 4 \cos(2x) + 6] = \frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{3}{8}$$

Il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{8} \cos(4x) + \frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{3}{8} \right] dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4x) \, dx + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \, dx + \frac{3}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{32} [\sin(4x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{8} * \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx = \frac{3\pi}{16}$$

Remarque

Bien entendu s'il avait fallu linéariser un sinus à la puissance quelconque nous aurions utilisé la même méthode :

$$\sin^n x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n (e^{ix} - e^{-ix})^n = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} e^{pix} (-1)^p e^{-(n-p)ix}$$

$$\sin^n x = \left(\frac{1}{2i}\right)^n \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{n}{p} e^{(2p-n)ix} = \dots$$