

Morphisme d'anneau

Définition	Soient $(A, +, *)$ et $(B, +, *)$ deux anneaux unitaires. On appelle morphisme d'anneau de A dans B toute application f telle que : $\left\{ \begin{array}{l} f(1_A) = f(1_B) \\ \forall (a, b) \in A^2, f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ et } f(a * b) = f(a) * f(b) \end{array} \right\}$
Remarque	<ul style="list-style-type: none"> Un morphisme d'anneau de $(A, +, *)$ vers $(B, +, *)$ est donc un morphisme de groupe de $(A, +)$ vers $(B, +)$ Lorsque $A = B$ on parle d'endomorphisme d'anneau
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> La composée de deux morphismes d'anneau est un morphisme d'anneau L'image d'un sous anneau par un morphisme d'anneau est un sous anneau L'image réciproque d'un sous anneau par un morphisme d'anneau est un sous anneau
Preuve	
Les preuves sont à reprendre sur le même principe que pour les morphismes de groupe.	
Définitions	<ul style="list-style-type: none"> Un morphisme d'anneau bijectif est appelé un isomorphisme d'anneau Lorsqu'un isomorphisme d'anneau va d'un ensemble A à un ensemble B, on dit que A et B sont isomorphes. Lorsque $A = B$ on dit que l'isomorphisme est un automorphisme
Propriétés	<ul style="list-style-type: none"> La composée de deux isomorphismes d'anneau est un isomorphisme d'anneau. La réciproque d'un isomorphisme d'anneau est un isomorphisme d'anneau.
Preuve	
Là encore, les preuves sont à reprendre sur le même principe que pour les morphismes de groupe.	
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> L'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x \end{array} \right\}$ est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}, +, *)$ vers $(\mathbb{R}, +, *)$. Soit $p \in \mathbb{N}$. L'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x \rightarrow \dot{x} \end{array} \right\}$ est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{Z}, +, *)$ vers $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, *)$. L'application $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \rightarrow \bar{z} \end{array} \right\}$ est un automorphisme dans $(\mathbb{C}, +, *)$.