

Multiples, diviseurs	
Définition	Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que a divise b ou que a est un diviseur de b lorsqu'il existe un entier relatif c tel que $b = ac$. Cette relation se note $a \mid b$.
Remarque	Il est alors équivalent de dire que b est un multiple de a
Exemple	-3 est un diviseur de 21 car $21 = (-3) * (-7)$. On peut aussi dire que 21 est un multiple de -3 et de 7
Notation	L'ensemble des diviseurs de a est noté $div(a)$ et l'ensemble des multiples de a est noté $a\mathbb{Z}$
Exemple	$div(12) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$; $6\mathbb{Z} = \{0; \pm 6; \pm 12; \pm 18; \pm 24 \dots\}$;
Théorème	La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Cela signifie qu'elle est : • Reflexive : $a \mid a$ • Antisymétrique : si $a \mid b$ alors $b \nmid a$ • Transitive : si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$ Sur $\mathbb{Z}$ seules la réflexivité et la transitivité sont assurées. L'antisymétrie ne l'est pas. En effet $a \mid -a$ et $-a \mid a$ pour a non nul.
Preuve	• Réflexivité : $a \mid a$ car $a = a * 1$ • Transitivité : si $a \mid b$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a * k$. Si $b \mid c$ alors $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = b * k'$. Nous avons donc $c = a * k * k' = a * (kk')$ ce qui implique $a \mid c$ • Antisymétrie sur $\mathbb{N}$: si $a \mid b$ avec $a \neq b$ alors $b = a * c$ avec $c \in \mathbb{N}$ et $c > 1$. On a donc $b > a \Rightarrow b \nmid a$
Propriété	Linéarité : si $a \mid b$ et $a \mid c$ alors $a \mid \lambda b + \mu c$
Preuve	si $a \mid b$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ak$ si $a \mid c$ alors $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tq $c = ak'$ $\lambda b + \mu c = \lambda ak + \mu ak' = a(\lambda k + \mu k')$ Donc a divise $\lambda b + \mu c$
Propriété	Conservation du produit : si $a \mid b$ et $c \mid d$ alors $ac \mid bd$
Preuve	si $a \mid b$ alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $b = ak$ si $c \mid d$ alors $\exists k' \in \mathbb{Z}$ tq $d = ck'$ Il vient $bd = ackk'$ et donc ac divise bd