Opérations sur les limites de fonction

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition à valeurs dans $\mathbb{R}$.
a désigne soit un nombre réel soit $+\infty$ soit $-\infty$ adhérent à D_f et D_g. l et l' désignent des nombres réels.

Propriété — Somme et produit de fonctions

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x)) = \dots$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} (f(x)\times g(x)) = \dots$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas notés FI (Forme indéterminée) on ne peut conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Exemple

Dans les exemples ci-dessous $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc a priori $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))$ est une FI. Néanmoins lorsque :

- $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. $f(x) - g(x) = \frac{1}{x}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = 0$
- $f(x) = x$ et $g(x) = 2x$. $f(x) - g(x) = -x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = -\infty$
- $f(x) = 2x$ et $g(x) = x$. $f(x) - g(x) = x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = +\infty$

Propriété — Quotient de fonctions

Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ alors

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Si $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ alors

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \dots$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

Dans les exemples ci-dessous $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc a priori $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ est une FI. Néanmoins lorsque :

- $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$. $\frac{f(x)}{g(x)} = x$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = +\infty$
- $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$

Là encore on ne pouvait conclure immédiatement devant la FI. Il convenait de faire un petit calcul pour connaître la limite du quotient.

Opérations sur les limites de fonction	
Théorème	Soit $f :\ D_f \to \mathbb{R}$ une fonction. $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et adhérent à D_f, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{x\to a} f(x) = l$ Soit $g :\ D_g \to \mathbb{R}$ une fonction. l adhérent à D_g, $l' \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim_{x\to l} g(x) = l'$ Alors $\lim_{x\to a} gof(x) = l'$

Preuve

$\lim_{x\to l} g(x) = l'$ donc $\forall V_{l'}\ \exists V_l$ tel que $\forall x \in V_l,\ g(x) \in V_{l'}$

Choisissons V_1 voisinage de l tel que $V_1 \subset V_l$.

$\lim_{x\to a} f(x) = l$ donc $\exists V_2$ voisinage de a tel que $\forall x \in V_2,\ f(x) \in V_1$

Nous avons donc $\forall V_{l'}$, $\exists V_2$ voisinage de a tel que $\forall x \in V_2\ f(x) \in V_1$ ce qui implique $gof(x) \in V_{l'}$

Ceci est la traduction de : $\lim_{x\to a} gof(x) = l'$

Exemple	Soit $f : x \to \frac{x^2-1}{x^2+1}$; $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$; $\lim_{x\to -1} e^x = e^{-1}$; Donc $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = \frac{1}{e}$