

ppcm

Définition
et
théorème

Soient a et b deux entiers relatifs. On appelle plus petit multiple commun de a et b et l'on note $a \vee b$ le nombre m entier naturel unique tel que $m\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$

Preuve

A priori rien ne garantit l'existence de ce nombre.

- Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $m = 0$ convient très bien.

- Si $ab \neq 0$ Posons $m = \frac{|ab|}{a \wedge b}$

$$\text{Soit } x \in m\mathbb{Z}, x = mp \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{ab}{a \wedge b} p = a * \left(\frac{b}{a \wedge b}\right) * p = b * \left(\frac{a}{a \wedge b}\right) * p$$

$$\text{Donc } x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}, m\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$$

$$\text{Soit } x \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}, x = ap \text{ et } x = bq \text{ mais } a = a' * a \wedge b \text{ et } b = b' * a \wedge b \text{ avec } a' \wedge b' = 1$$

$$\text{Donc } x = a' * a \wedge b * p \text{ et } x = b' * a \wedge b * q \text{ Il vient } a' * a \wedge b * p = b' * a \wedge b * q \Rightarrow a'p = b'q$$

$$a' \mid b'q \text{ mais } a' \wedge b' = 1 \text{ donc d'après le théorème de Gauss } a' \mid q \Rightarrow q = a'q'$$

$$\text{Nous avons donc } x = bq = b' * a \wedge b * a'q' = q'(a'b' * a \wedge b) = q'm \text{ donc } x \in m\mathbb{Z}, a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$$

$$\text{Conclusion : } a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$$

Donc m existe. Est-il unique ? Supposons que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z} = m'\mathbb{Z}$ avec $m \neq m'$

Nous avons $m \in m'\mathbb{Z}$ et $m' \in m\mathbb{Z}$ donc $m' \mid m$ et $m \mid m'$ donc $m = -m'$. m et m' étant positifs, nous sommes devant une contradiction.

Propriété

Ce nombre $a \vee b$ vérifie $a \vee b = \frac{|ab|}{a \wedge b}$

Preuve

La démonstration a déjà été faite ci-dessus pour montrer l'existence de $a \vee b$

Théorème

Toute famille finie d'entiers relatifs possède un ppcm.

Preuve

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$. L'associativité de l'intersection nous permet d'écrire $a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z} = (a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z}) \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z} = m_1\mathbb{Z} \cap a_3\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z}$ (m_1 étant le ppcm de a_1 et a_2) et ainsi de suite de deux en deux, de trouver le ppcm de $a_1, a_2, \dots, a_n$

Théorème

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors $ka_1 \vee ka_2 \vee \dots \vee ka_n = |k|(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)$

Preuve

$$ka_1\mathbb{Z} \cap ka_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap ka_n\mathbb{Z} = |k|(a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \dots \cap a_n\mathbb{Z}) = |k|(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n)\mathbb{Z}$$

Exemple

$$12 \vee 18 = 6(2 \vee 3) = 6 * 6 = 36$$