

**Quantificateurs**

<b>Définition</b>	Le symbole $\forall$ signifie « quelque soit ». $\forall x \in E, P(x)$ signifie que la propriété $P$ est vraie pour tout $x$ appartenant à $E$ .
<b>Exemple</b>	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
<b>Définition</b>	Le symbole $\exists$ signifie « Il existe ». $\exists x \in E, P(x)$ signifie que la propriété $P$ est vraie pour au moins un $x$ de l'ensemble $E$ .
<b>Exemple</b>	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \geq 0$ . En effet $x = \frac{1}{2}$ convient très bien.

**Négation des quantificateurs**

<b>Propriété</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Les propriétés <i>non</i> (<math>\forall x \in E, P(x)</math>) et <math>\exists x \in E, P(x)</math> sont équivalentes</li> <li>Les propriétés <i>non</i> (<math>\exists x \in E, P(x)</math>) et <math>\forall x \in E, P(x)</math> sont équivalentes</li> </ul>
<b>Exemple</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>La négation de <math>\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0</math> est <math>\exists x \in \mathbb{R}, x^2 &lt; 0</math> Bien entendu cette négation est fausse.</li> <li>Traduisons avec des quantificateurs le fait que <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3</math> Nous pouvons le traduire ainsi : <math>\forall \varepsilon &gt; 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,  U_n - 3  \leq \varepsilon</math> La négation de cette proposition est <math>\exists \varepsilon &gt; 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N,  U_n - 3  &gt; \varepsilon</math></li> </ul>
<b>Remarque</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Deux quantificateurs <math>\forall</math> ou deux quantificateurs <math>\exists</math> peuvent aisément permuter.</li> <li>En général le quantificateur <math>\forall</math> et le quantificateur <math>\exists</math> ne permutent pas.</li> </ul>
<b>Exemple</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0</math> peut aussi se lire <math>\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \geq 0</math></li> <li><math>\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} y^3 = x</math> est fausse. Par contre la permutation de <math>\forall</math> et <math>\exists</math> nous donne : <math>\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} y^3 = x</math> et cette proposition est vraie.</li> </ul>
<b>Remarque</b>	Le quantificateur $\exists$ peut être accompagné d'un !. $\exists ! x \in E, P(x)$ signifie que la propriété $P$ est vraie pour un et un seul $x$ de l'ensemble $E$ .
<b>Exemple</b>	$\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ signifie que la fonction $f$ ne s'annule que pour un seul réel $x$ .