

Racines nièmes.

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{U}_n$

Théorème L'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n racines distinctes qui sont de la forme $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$. On note donc $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } z = e^{\frac{i2k\pi}{n}} \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1\}$

Preuve

Posons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}^+$ et θ un réel tel que $0 \leq \theta < 2\pi$
 $z^n = 1 \Leftrightarrow \rho^n e^{in\theta} = 1 e^{2\pi i}$

Identifions modules et arguments de ces deux nombres complexes.

$$\rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1 \text{ car } \rho \in \mathbb{R}^+$$

$$\rho^n e^{in\theta} = 1 e^{0i} \Rightarrow n\theta = 0 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Nous avons donc $z = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\}$

Propriétés Les racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n cotés.

Preuve

Soit A_k le point d'affixe $z_k = e^{\frac{i2k\pi}{n}}$. $OA_k = \left| e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right| = 1$

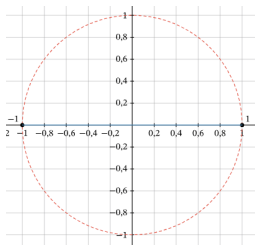
Donc tous les A_k sont placés sur le cercle de centre 0 et de rayon 1.

$$\text{L'angle } \widehat{A_k OA_{k+1}} = \frac{2(k+1)\pi}{n} - \frac{2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$$

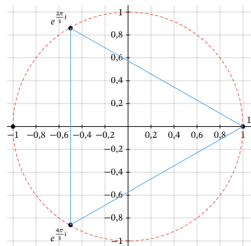
Chaque secteur angulaire $\widehat{A_k OA_{k+1}}$ représente donc un nième du cercle unité. [Type equation here.](#)

Exemple

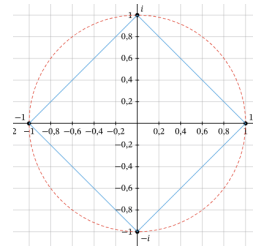
$$\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$$



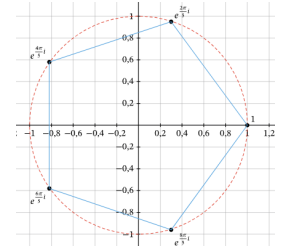
$$\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\} \text{ avec } j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$$



$$\mathbb{U}_4 = \{1; i; -1; -i\}$$



$$\mathbb{U}_5 = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\} \text{ avec } \alpha = e^{\frac{i2\pi}{5}}$$



Propriété Un nombre complexe non nul admet exactement n – racines nièmes distinctes.

Preuve

Soit z un nombre complexe non nul. Mettons le sous forme trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

Remarquons d'abord que $\omega = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i\theta}{n}}$ convient très bien. En effet $\omega^n = z$, ω est donc une racine nième de z .

Soit α une racine nième de z . Remarquons que $\omega^n = \alpha^n \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\omega}$ est une racine nième de l'unité

$$\text{Il vient } \frac{\alpha}{\omega} \in \left\{1, e^{\frac{i2\pi}{n}}, e^{\frac{i4\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}\right\} \Leftrightarrow \alpha \in \left\{\omega, \omega e^{\frac{i2\pi}{n}}, \omega e^{\frac{i4\pi}{n}}, \dots, \omega e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

Réciproquement toutes ces racines conviennent très bien. L'ensemble des n racines nièmes distinctes de z est donc

$$\left\{\omega, \omega e^{\frac{i2\pi}{n}}, \omega e^{\frac{i4\pi}{n}}, \dots, \omega e^{\frac{i2(n-1)\pi}{n}}\right\}$$

Exemple

Les racines cubiques de $1 - i$ sont $\sqrt[6]{2} e^{-\frac{i\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}}$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Preuve

$$z^3 = 1 - i \Leftrightarrow z^3 = \sqrt{2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow z = \sqrt[6]{2} e^{-\frac{i\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}$$