Nombres complexes. Cours.

Polynômes complexes	
Définition	On appelle polynôme complexe toute fonction P de la forme : $P:\begin{Bmatrix} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \to a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots a_n z^n \end{Bmatrix}$ Où $a_0, a_1, \dots . a_n$ sont des nombres complexes et n un entier naturel. Un tel polynôme est dit de degré 3.
Exemple	On considère P défini par $P(z) = 2z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ Ce polynôme est un polynôme de degré 3.
Définition	Soit P un polynome complexe quelconque. On appelle racine de P un nombre complexe a tel que $P(a) = 0$.
Exemple	Le nombre 1 est une racine du polynôme P défini par $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$. En effet $P(1) = 1^3 - 1 + 1 - 1 = 0$
Propriété	Soit P un polynome complexe quelconque. Si a est une racine de P alors il existe un polynome Q tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$
Exemple	Reprenons l'exemple précédent où 1 est racine du polynôme P défini par $P(z) = z^3 - z + z - 1$ $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$
Remarque	Dans le cas où $P(z) = (z - a)Q(z)$ le degré du polynôme Q est égal au degré du polynôme -1.
Exemple	Toujours dans l'exemple précédent où $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1 = (z - 1)(z^2 + 1)$ Le degré de P est 3 et le degré de Q défini par $Q(z) = z^2 + 1$ est 2

Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes

Propriété

Considérons l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et aux coefficients vérifiant $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\ \ , c \in \mathbb{C}\ \ $.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac$ est différent de 0. cette équation admet une seule solution : $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- Dans le cas contraire cette équation admet deux solutions : $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}$ et $z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$ avec δ racine carrée de Δ

Preuve

$$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}) = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Le nombre complexe $b^2 - 4ac$ admet une racine carrée. Appelons la δ. Il vient $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2$

Soit $\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\delta}{2a}\right)\right]\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\delta}{2a}\right)\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \\ ou \\ z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \end{Bmatrix}$

Il y a donc deux racines différentes et simples ssi $\delta \neq 0$ qui sont $\begin{Bmatrix} z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \\ et \\ z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \end{Bmatrix}$

Dans le cas contraire il n'y a qu'une racine mais double valant $z = -\frac{b}{2a}$

Exemple

Résolvons l'équation $z^2 - iz + 1$

$$b^2 - 4ac = (-i)^2 - 4 = -5 = \left(i\sqrt{5}\right)^2$$

Les deux racines de cette équation sont donc $\begin{Bmatrix} z = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} = \frac{i}{2} + \frac{i\sqrt{5}}{2} = i\frac{(1+\sqrt{5})}{2} \\ et \\ z = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} = \frac{i}{2} - \frac{i\sqrt{5}}{2} = i\frac{(1-\sqrt{5})}{2} \end{Bmatrix}$

Propriété

Soient z_0 et z_1 deux racines de l'équation du second degré $az^2 + bz + c$

Il vient $z_0 + z_1 = -\frac{b}{a}$ et $z_0 z_1 = \frac{c}{a}$

Preuve

La proposition précédente nous informe que $\begin{cases} z_0 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a} \\ et \\ z_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a} \end{cases}$ (les deux sont interchangeables)

Donc $z_0 + z_1 = -\frac{b}{a}$

$$z_0 z_1 = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}\right) = \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemple	Grâce à cette nouvelle propriété il devient très facile lorsque l'on possède une racine du polynôme du second degré d'en déduire la première. Reprenons l'exemple précédent. Nous devions résoudre l'équation $z^2 - iz + 1 = 0$. Supposons que nous connaissions une des deux racines : par exemple $z_1 = i\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ Cette propriété nous dit que $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-i}{1} = i$. Il vient $z_2 = i - z_1 = i - i\frac{(1+\sqrt{5})}{2} = i\frac{(1-\sqrt{5})}{2}$; Nous retombons donc bien sur le résultat précédemment trouvé.