<table>
<tr><th colspan="3">$\sum$ somme simple</th></tr>
<tr><td>Définition</td><td colspan="2">Soit $(a_0, a_1 \dots a_n)$ une famille de nombres de $\mathbb{C}^{n+1}$. Le nombre $a_0 + a_1 + \cdots a_n$ peut être noté $\sum_{i=0}^{i=n} a_i$ ou encore $\sum_{0\le i\le n} a_i$.
Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes indexée par un ensemble I fini quelconque, $\sum_{i\in I} a_i$ désigne la somme des a_i, i parcourant I.</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">Soit $I = \{0, 2, 5, 7, 11\}$. On considère la famille de complexes $(a_0, a_1, a_2, a_3 \dots a_{11})$
$$\sum_{i\in I} a_i = a_0 + a_2 + a_5 + a_7 + a_{11}$$</td></tr>
<tr><td>Propriété</td><td>$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$</td><td>$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td>Soit $P(n)$la propriété $\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
<u>Intialisation</u> : si $n = 0$, $\sum_{i=0}^{i=0} i = 0$. De plus $\frac{0(0+1)}{2} = 0$ Donc $P(0)$ est vérifiée.
<u>Hérédité</u> : Supposons $P(n)$ vérifiée.
$$\sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{i=n} i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n+1} i = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$P(n+1)$ est donc vérifiée.
Il vient $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}$</td><td>Soit $P(n)$la propriété $\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
<u>Intialisation</u> : si $n = 0$, $\sum_{i=0}^{i=0} i^2 = 0$. De plus $\frac{0(0+1)(2*0+1)}{2} = 0$ Donc $P(0)$ est vérifiée.
<u>Hérédité</u> : Supposons $P(n)$ vérifiée.
$$\sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{i=n} i^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + \frac{(6n+6)}{6}\right]$$
$$\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = (n+1)\left[\frac{(2n^2+7n+6)}{6}\right]$$
$$\sum_{i=0}^{i=n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$
$P(n+1)$ est donc vérifiée.
Il vient $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$</td></tr>
<tr><td>Propriétés</td><td colspan="2">Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes indéxées par un ensemble I fini quelconque.
$\sum_{i\in I}(\boldsymbol{a_i} + \boldsymbol{b_i}) = \sum_{i\in I} \boldsymbol{a_i} + \sum_{i\in I} \boldsymbol{b_i}$ (commutativité et associativité de la somme dans $\mathbb{C}$)
Soint I et J deux ensembles finis disjoints quelconques. Soit $(a_i)_{i\in I\cup J}$ une famille de complexes indéxée par l' ensemble $I\cup J$. Alors :
$$\sum_{i\in I\cup J} \boldsymbol{a_i} = \sum_{i\in I} \boldsymbol{a_i} + \sum_{i\in J} \boldsymbol{a_i}$$
Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de complexes indéxées par un ensemble I fini quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$
$$\sum_{i\in I} \boldsymbol{\lambda a_i} = \boldsymbol{\lambda} \sum_{i\in I} \boldsymbol{a_i}$$</td></tr>
<tr><td>Exemple</td><td colspan="2">$$\sum_{k=0}^{k=n}(3k+1) = 3\sum_{k=0}^{k=n} k + \sum_{k=0}^{k=n} 1 = 3\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{3n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$</td></tr>
<tr><td>Propriété Somme télescopique</td><td colspan="2">Soit $(a_0, a_1 \dots a_n)$ une famille de nombres de $\mathbb{C}^{n+1}$. $\sum_{i=0}^{i=n}(a_{i+1} - a_i) = a_{n+1} - a_0$</td></tr>
<tr><td>Preuve</td><td colspan="2">. $\sum_{i=0}^{i=n}(a_{i+1} - a_i) = a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \cdots a_{n+1} - a_n = a_{n+1} - a_0$</td></tr>
</table>

Propriété Changement d'indice	Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres comlexes indéxée par un ensemble fini I. On suppose que J est un autre ensemble fini, et que φ est une bijection de J dans I. Alors $$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\varphi(j)}$$
Exemple	$$\sum_{k=1}^{k=n+1}(k-1) = \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$ Nous avons utilisé la fonction φ définie par $\varphi(x) = x+1$ qui envoie la famille $0, 1, 2, \dots . n$ sur $1, 2, \dots . n, n+1$
Propriété	$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots x^n = \begin{Bmatrix} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} \; pour\ x \neq 1 \\ n+1\ pour\ x = 1 \end{Bmatrix}$$

Preuve

Pour $x = 1$ c'est évident.
Pour $x \neq 1$ établissons un raisonement par récurence.
Soit $P(n)$: $\sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$P(0)$est vraie. En effet $\sum_{k=0}^{k=0} x^k = x^0 = 1$ et $\frac{1-x}{1-x} = 1$
Supposons $P(n)$ vérifiée.

$$\sum_{k=0}^{k=n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \Rightarrow \sum_{k=0}^{k=n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}(1-x)}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Il vient : $\sum_{k=0}^{k=n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$. $P(n+1)$ est donc vérifiée. La propriété est vraie pour tout n.

Propriété	$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1}$$

Preuve

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1} = a\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1} - b\sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}\, b^{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a^k\, b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k\, b^{n-k} = a^n - b^n$$

Propriété	Soient $(a_0, a_1 \dots\ a_n)$ et $(b_0, b_1 \dots\ b_n)$ deux familles de nombres de $\mathbb{C}^{n+1}$ $$\left(\sum_{k=0}^{k=n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{k=n} b_k\right) = \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{j=0}^{j=n} a_k\, b_k$$

Preuve

$$\left(\sum_{k=0}^{k=n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{k=n} b_k\right) = (a_0 + a_1 + \cdots a_n)(b_0 + b_1 + \cdots b_n) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k(b_0 + b_1 + \cdots b_n) =$$
$$\sum_{k=0}^{k=n}(a_k b_0 + \cdots a_k b_n) = \sum_{k=0}^{k=n}\sum_{j=0}^{j=n} a_k\, b_j$$