Théorème de la limite monotone

Théorème	• Soit (u_n) une suite croissante et majorée par M. Alors (u_n) converge vers une limite l avec $l \leq$ M • Soit (v_n) une suite décroissante et minorée par m. Alors (v_n) converge vers une limite l' avec $l' \geq m$

Preuve

Ce théorème s'appuie sur la propriété de la borne sup (ou de la borne inf). Rappelons là :

- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne sup
- Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inf

Supposons (u_n) croissante et majorée par M. Considérons $A = \{u_n\}$. A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne sup. Appelons la m.

Cela signifie deux choses : $\begin{Bmatrix} \forall n\ u_n \leq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0\ tq\ \left|u_{n_0} - m\right| < \varepsilon \Longrightarrow m - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq m \end{Bmatrix}$

Or (u_n) est croissante, donc $\forall n \geq n_0\ \ u_n \geq u_{n_0} \geq\ m - \varepsilon$ ce qui implique $m - \varepsilon \leq u_n \leq\ m$

Nous avons donc démontré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0\ tq\ \forall n \geq n_0\ \ m - \varepsilon \leq u_n \leq\ m \Longrightarrow |u_n - m| \leq\ \varepsilon$

Cela suffit pour annoncer que $m = \lim_{n \to +\propto} u_n$. De plus par définition $m \leq M$

La démonstration est symétrique dans le cas où (u_n) décroissante et minorée par M.

Exemple	Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 30$ et par $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 20$. • Nous allons d'abord démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}\ u_n \leq u_{n+1} \leq 50.$ Nous appellerons cette affirmation $P(n)$ **Intialisation :** $u_0 = 30$; $u_1 = 0{,}6u_0 + 20 = 0{,}6 * 30 + 20 = 38$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 50.$ $P(0)$ vraie. **Hérédité :** Supposons $P(n)$ vraie $u_n \leq u_{n+1} \leq 50 \to 0{,}6 * u_n + 20 \leq 0{,}6 * u_{n+1} + 20 \leq 0{,}6 * 50 + 20 \to u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 50$ $P(n+1)$ est vérifiée. **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}\ u_n \leq u_{n+1} \leq 50.$ • Nous en déduisons que (u_n) est croissante et majorée. Donc elle converge vers une limite l qui vérifie $l \leq 50$
Théorème	Toute suite croissante et non majorée tend vers l'infini. Toute suite décroissante et non minorée tend vers moins l'infini.

Preuve

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Elle est non majorée. Donc $\forall A > 0\ \exists n_0\ tq\ u_{n_0}\ \geq A$

Or (u_n) est croissante donc $\forall n \geq n_0\ u_n \geq u_{n_0}$

Il vient donc $\forall A > 0\ \exists n_0\ tq\ \forall n \geq n_0\ u_n \geq A$. C'est exactement la traduction mathématique de $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Nous avons une démonstration symétrique pour (u_n) décroissante et non minorée.