

Suites extraites

Définition	Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On appelle φ la fonction d'extraction.
Exemples	- Les suites $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(-\frac{1}{2n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $\frac{(-1)^n}{n}$. La première fonction d'extraction est φ définie par $\varphi(n) = 2n$. La deuxième fonction d'extraction est φ' définie par $\varphi'(n) = 2n + 1$. - La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$. La fonction d'extraction est φ définie par $\varphi(n) = n^2$.
Définition	On appelle valeur d'adhérence d'une suite toute limite d'une suite extraite de cette suite.
Exemple	La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux suites extraites qui sont les suites constantes 1 et -1 associées aux fonctions d'extraction $\varphi(n) = 2n$ et $\varphi'(n) = 2n + 1$. Ces deux suites constantes ont donc pour limite 1 et -1 . Nous en déduisons que 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Théorème	Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers une limite l . Alors toute suite extraite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergera vers cette limite l .

Démonstration

- Cette démonstration commence par un lemme. Soit φ une fonction d'extraction quelconque, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$$
En effet φ étant strictement croissante, $\varphi(n) \geq \varphi(n-1) + 1$
Réalisons une petite récurrence. Nous appellerons P_n la propriété $\varphi(n) \geq n$
 P_0 est vérifiée puisque φ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$
Supposons P_{n-1} vérifiée. Nous avons $\varphi(n-1) \geq n-1$. Or $\varphi(n) \geq \varphi(n-1) + 1 \geq n-1 + 1 \geq n$. Donc P_n est vérifiée. Nous en concluons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$
- Revenons à la démonstration du théorème. Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}} = (U_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite convergente $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$. $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l .
Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0$ tq $\forall n \geq N_0, |U_n - l| \leq \varepsilon$
Pour $n \geq N_0$ nous avons $\varphi(n) \geq n \geq N_0$, Nous avons donc aussi $|U_{\varphi(n)} - l| \leq \varepsilon$
La convergence de V_n est donc démontrée

Remarque	Ce théorème est souvent utilisé pour sa contraposée. Il suffit de montrer que deux suites extraites d'une même suite convergent vers une limite différente pour montrer que la suite originelle ne converge pas.
Exemple	Considérons la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \sin\left(\sqrt{3} + \frac{(-1)^n \pi}{2}\right)$ Cette suite possède deux suites extraites : $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ $U_{2n} = \sin\left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\sqrt{3})$ $U_{2n+1} = \sin\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\sqrt{3})$ Les deux suites extraites sont constantes, elles convergent vers des limites différentes nous en déduisons que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas. Il est néanmoins des cas où la convergence des suites extraites nous donne la convergence de la suite originelle. C'est l'objet du théorème suivant.
Théorème	Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si les deux suites extraites $(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite l alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même limite.

Démonstration

$(U_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \text{ tq } \forall n \geq N_0, |U_{2n} - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \text{ tq } \forall n \geq N_1, |U_{2n+1} - l| \leq \varepsilon$$

Prenons un $N_2 \geq \max(2N_0, 2N_1 + 1)$, Pour tout n supérieur à N_2 , n sera soit pair, soit impair.

Si n est pair alors $n = 2p$ et donc $|U_n - l| \leq \varepsilon$

Si n est impair alors $n = 2p + 1$ et donc $|U_n - l| \leq \varepsilon$

Dans tous les cas pour $n \geq N_2$, nous aurons $|U_n - l| \leq \varepsilon$ ce qui prouve que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l

Exemple

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Les deux suites extraites (U_{2n}) et (U_{2n+1}) définies par $U_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $U_{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$ convergent toutes les deux vers 0. Nous en déduisons la convergence de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0